Lista treningowa 2

zadania z kolokwium z zeszłego roku:

1. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy (a_{ij}) rozmiaru $n \times n$:
   a) (3 pkt.) $a_{ij} = \min(i, j)$;
   b) (3 pkt.) $a_{ij} = \min(i^2, j^2)$.
2. Udowodnij, że jeśli macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ są dodatnio określone, to macierz AB nie ma ujemnych wartości własnych.
3. "Podaj przykład" znaczy: "podaj przykład i uzasadnij, że ma on żądane własności".
   a) (3 pkt.) Podaj przykład niezerowej formy kwadratowej $Q\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, takiej że
   $$Q(E_1) = Q(E_2) = Q(E_3) = 0.$$
   b) (4 pkt.) Podaj przykład skończonego $F \subseteq \mathbf{R}^3$, takiego że dla każdej formy kwadratowej $Q\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ zachodzi warunek:
   $$\big((\forall f \in F)(Q(f) = 0)\big) \Rightarrow \big((\forall v \in \mathbf{R}^3)(Q(v) = 0)\big).$$
4. Niech X będzie skończonym zbiorem o n elementach, zaś $\mathcal{F}$ rodziną $n+1$ niepustych podzbiorów X. Udowodnij, że istnieje niepusta podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ taka, że każdy element zbioru X należy do parzyście wielu elementów $\mathcal{F}'$.
   [Przypomnienie: zero jest liczbą parzystą.]
5. Niech F będzie diagonalizowalnym endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Niech $W < V$. Załóżmy, że $F(W) \subseteq W$. Udowodnij, że
   $$W = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(F)} W \cap V_\lambda.$$

Inne stare zadania z kolokwiów i egzaminów.

6. Niech $V = V_1 \oplus V_2$, i niech Q będzie formą kwadratową na V, taką że $Q|_{V_1}$ i $Q|_{V_2}$ są dodatnio określone. Czy Q musi być dodatnio określona?
7. Czy jest prawdą, że z każdej zespolonej macierzy odwracalnej można zrobić macierz nieodwracalną przez zmianę wartości jednego jej wyrazu?
8. $B = (1-X+X^2-X^3, 2+X+X^2+2X^3, -1+2X-X^2+X^3, 2+X+2X^2+X^3)$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}_3[X]$. Przekształcenie liniowe $F\colon \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ jest dane wzorem $F(P) = P(X) + XP'(X) - P''(X)$. Oblicz $\det(m_B(F))$.
9. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$; niech $B = (b_1, b_2)$ będzie bazą rzeczywistej przestrzeni liniowej V; niech $C = (c_1, c_2)$ będzie drugą bazą V, związaną z B wzorami $c_1 = 3b_1 + b_2$, $c_2 = 4b_1 + 2b_2$.
   a) Niech $F\colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, takim że $m_B^B(F) = A$. Wyznacz $m_C^C(F)$.
   b) Niech $Q\colon V \to \mathbf{R}$ będzie formą kwadratową, taką że $m^{BB}(Q) = A$. Wyznacz $m^{CC}(Q)$.

10. Niech $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.
a)(1 pkt.) Wyznacz wymiar i (jakąś) bazę V.
b)(2 pkt.) Uzasadnij, że $\det\colon V \to \mathbf{R}$ jest formą kwadratową.
c)(4 pkt.) Wyznacz sygnaturę formy kwadratowej $\det\colon V \to \mathbf{R}$.

11. Sprawdź, czy podana forma kwadratowa jest dodatnio określona.

$$Q(x, y, z, t, s) = 10x^2 + 2xy + 5y^2 - 2yz + 3z^2 + 4xz + 3t^2 - 6ts + 4s^2$$

12. Oblicz wyznacznik $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

13. Podaj przykład formy kwadratowej Q na przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1) > 0$, $Q(E_2) > 0$, $Q(-E_3) > 0$, a sygnatura Q wynosi $(1, 2)$.

14. Uzasadnij, że istnieje liczba rzeczywista x, taka że

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

15. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są pewnymi liczbami zespolonymi. Udowodnij, że krotność geometryczna dowolnej wartości własnej macierzy A wynosi 1.

16. Znajdź ostatnią cyfrę liczby, która jest wartością bezwzględną wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -32 & 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$