Lista treningowa 3

zadania z kolokwium z zeszłego roku:

1. Udowodnij, że jeśli macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ są dodatnio określone, to macierz AB nie ma ujemnych wartości własnych.
2. Wyznacz odległość punktu $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ od podprzestrzeni $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$.
3. Podaj przykład trzech liniowych izometrii F, G, H przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że $F\circ G\circ H = \mathrm{Id}$, ale $H \circ G \circ F \neq \mathrm{Id}$.
   [Napisz macierze tych izometrii i uzasadnij żądane własności.]
4. Niech $A = US$, $A' = U'S'$ będą rozkładami biegunowymi odwracalnych endomorfizmów A, A' przestrzeni unitarnej V. Udowodnij, że jeśli $A'A^{-1}$ jest przekształceniem unitarnym, to $S = S'$.
   [Przypomnienie: rozkład biegunowy jest jednoznaczny.]

Inne stare zadania z kolokwiów i egzaminów.

5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową (nad ciałem $\mathbf{R}$), zaś $v_1, v_2 \in V$ niech będą liniowo niezależne. Udowodnij, że istnieje podprzestrzeń $W < V$, taka że $P_W(v_1) = P_W(v_2) \neq 0$.
   (Uwaga: sam rysunek nie wystarczy.)
6. Przez $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznaczamy standardowy iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^3$. Dla jakich wartości parametru t istnieją w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ liniowo niezależne wektory v_1, v_2, v_3 z których każdy ma długość 1, $\langle v_1, v_2\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle v_1, v_3\rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle v_2, v_3\rangle = t$.
7. Znajdź rozkład biegunowy macierzy $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.
8. O rzeczywistej macierzy A rozmiaru 3×3 wiadomo, że $\det A = 6$, A jest symetryczna, $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ są jej wektorami własnymi o wartościach własnych 1 i 2. Znajdź tę macierz.
9. Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Niech liniowe $P\colon V \to V$ będzie rzutem (tzn. $P^2 = P$). Pokaż, że jeśli dla każdego wektora v zachodzi $\|Pv\| \leq \|v\|$, to P jest samosprzężony.
10. O odwzorowaniu $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ wiadomo, że ma wyłącznie rzeczywiste wartości własne i że diagonalizuje się (nad $\mathbf{R}$). Udowodnij, że istnieje baza ortonormalna B przestrzeni $\mathbf{R}^n$, taka że $m_B(P)$ jest macierzą górnotrójkątną.
11. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbf{R}$ równanie $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + tzx$ ma jedyne rozwiązanie rzeczywiste?
12. Czy układ $(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(100x), \cos(100x))$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $C([-\pi, \pi])$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $[-\pi, \pi]$?

13. Niech W będzie rzeczywistą przestrzenią euklidesową wymiaru $n \geq 3$, zaś $F : W \to W$ przekształceniem liniowym, takim że dla dowolnych $v, w \in W$ zachodzi równość $V(v, w) = V(F(v), F(w))$ (tzn. F zachowuje pola równoległoboków). Udowodnij, że F jest ortogonalne.

14. Załóżmy, że macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ są samosprzężone i dodatnio określone. Udowodnij, że $\mathrm{tr}(AB) > 0$.

15. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ zawarta jest prosta $k = \{(1, 2, 0, -1)^\top + t(2, 3, -1, 2)^\top \mid t \in \mathbf{R}$, oraz prosta $\ell = \{(0, 1, 1, -2) + t(1, 2, 2, -1)^\top \mid t \in \mathbf{R}\}$. Oblicz odległość między prostymi k i ℓ.

    `www.math.uni.wroc.pl/~psnia/dydaktyka/algebra-liniowa-2/kolokwia.pdf`, zadania 90, 98, 105, 107