## Algebra ISIM, Lista 1

1. Przedstaw w postaci $a+bi$: $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{1-i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1+i}{2-i}$, $\frac{1}{i^5}$, $\frac{1}{(-2+i)(1-3i)}$, $\frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}$.
2. Zapisz w postaci trygonometrycznej/wykładniczej: $-1$, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$.
3. Oblicz $\overline{(2+3i)\overline{(7-i)}}$.
4. Rozwiąż układy równań $(a) \begin{cases} z+iw=1 \\ iz+w=1+i \end{cases}$ $(b) \begin{cases} (1+i)z-iw=3+i \\ (2+i)z+(2-i)w=2i \end{cases}$
5. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba $a$ jest pierwiastkiem $P$.
(a) $P(z)=z^3-2z^2-5z+6$, $a=-2$;
(b) $P(z)=z^4+2z^3+7z^2-18z+26$, $a=-2+3i$;
(c) $P(z)=z^4-3z^3+3z^2-3z+2$, $a=i$;
(d) $P(z)=z^5+2z^4+2z^3+10z^2+25z$, $a=1-2i$.
6. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby 1, 3, $2+i$ są jego pierwiastkami.

---

7. Rozwiąż (w $\mathbf{C}$):
(a) $z^2-z+1=0$, (b) $z^2+3z+3-i=0$, (c) $z^2+(2i-1)z+1+5i=0$, (d) $z^2+iz=2$, (e) $2z+\overline{z}=6-5i$.
8. Udowodnij: (a) $|-z|=|z|$, (b) $|z/w|=|z|/|w|$, (c) $|z/|z||=1$, (d) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}(z)$, (e) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}(z)$, (f) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$, (g) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, (h) $|z+w|\leq|z|+|w|$.
9. Średnia arytmetyczna pewnych 150 liczb zespolonych wynosi 1. Udowodnij, że przynajmniej jedna z tych liczb ma moduł nie mniejszy niż 1.
10. Oblicz podane iloczyny posługując się postacią trygonometryczną:
(a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$, (b) $(4+4i)(-3+3i)$, (c) $(10-10\sqrt{3}i)(2-2i)$, (d) $(\sqrt{3}+i)^{30}$.
11. Oblicz (a) $(1+i)^{1000}$; (b) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^{24}$; (c) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{129}$.
12. Wyraź $\sin(5\phi)$ przez $\sin\phi$ i $\cos\phi$. [Wsk. Użyj wzoru de Moivre'a.]
13. Wyprowadź wzór na postać trygonometryczną ilorazu dwóch liczb zespolonych (o zadanych postaciach trygonometrycznych). Użyj go do obliczenia ilorazów:
(a) $(2+2i)/(1-i)$, (b) $(1-\sqrt{3}i)/(\sqrt{3}+i)$, (c) $3i/(1+i)$.
14. Narysuj zbiór $\{\frac{1+it}{1-it} : t\in\mathbf{R}\}$.
15. Posługując się postacią trygonometryczną/wykładniczą oblicz i narysuj podane pierwiastki:
(a) 3 stopnia z $8i$; (b) 6 stopnia z 27; (c) 4 stopnia z $-(1/2)-(\sqrt{3}/2)i$; (d) 8 stopnia z 1.
16. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiór zadany równaniem / nierównością:
(a) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=1$; (b) $\frac{|z+1|}{|z-i|}=2$; (c) $|\arg z|<\pi/3$; (d) $3<|z-2+i|<5$; (e) $-1<\mathrm{Re}(iz)<0$.
17. Udowodnij, że $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1 \iff \mathrm{Im}(z)>0$. Zinterpretuj geometrycznie.
18. Na bokach czworokąta wypukłego zbudowano (na zewnątrz tego czworokąta) kwadraty o środkach $A$, $B$, $C$, $D$. Udowodnij, że odcinki $AC$ i $BD$ są prostopadłe i mają tę samą długość.
19. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$.
(a) $P(z)=z^6+27$;
(b) $P(z)=z^4+4z^3+4z^2-4z-5$;
(c) $P(z)=z^4+4$.
20. Rozwiąż równania: (a) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; (b) $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.
21. Uzasadnij wzór $x^{2n+1}-1=(x-1)\Pi_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n}-1$.
22. Uzasadnij (dla $z\neq 1$) wzór $1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dla $z=e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).

23. Oblicz $(2+i)(5+i)(8+i)$. Wywnioskuj następujący wzór Strassnitzky'ego:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

---

24. Liczbę zespoloną nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym stopnia $n$ z 1*, jeśli każdy pierwiastek stopnia $n$ z 1 jest jej potęgą. Które spośród pierwiastków z 1 stopnia: (a) 3; (b) 12; (c) 16; są pierwiastkami pierwotnymi tegoż stopnia z 1?
25. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia $n$ z 1.
26. Wyznacz liczby zespolone odpowiadające parze przeciwległych wierzchołków kwadratu, jeśli pozostałym dwóm wierzchołkom odpowiadają liczby $z$ oraz $w$.
27. Zinterpretuj geometrycznie wyrażenie $\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)$. (Zakładamy $z_1 \neq z_3 \neq z_2$.)
28. Udowodnij, że $\Pi_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = \pm 2^{-n}$; oraz że $\Pi_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\Pi_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\Pi_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.
29. Wyznacz wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ spełniona jest równość $W(x^2)W(x^3) = (W(x))^5$.
30. Uzasadnij, że reszty modulo 4 nie tworzą ciała. Niech $\mathbf{F}_2$ oznacza ciało reszt modulo 2. Wielomian $X^2 + X + 1$ nie ma pierwiastka w $\mathbf{F}_2$. Niech $j$ będzie (urojonym, w potocznym sensie tego słowa) pierwiastkiem owego wielomianu. Dorzuć $j$ (i inne potrzebne elementy) do $\mathbf{F}_2$ i otrzymaj ciało $\mathbf{K}$. Ile elementów ma $\mathbf{K}$? Napisz tabelki działań w $\mathbf{K}$. Czy potrafisz zrealizować $\mathbf{K}$ jako zbiór macierzy?