Algebra ISIM 1, Lista 11

Wiele zadań na tej liście ma przesadnie dużo podpunktów. Rozwiąż tyle z nich, ile potrzebujesz.

1. Rozpoznaj następujące krzywe stopnia 2 sprowadzając ich równania do możliwie prostej postaci: (a) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 28 = 0$, (b) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 29 = 0$, (c) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y + 30 = 0$, (d) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 123 = 0$, (e) $x^2 - 5y^2 - 4x - 50y - 121 = 0$, (f) $-y^2 - 7x + 8y - 21 = 0$, (g) $-y^2 + 8y - 21 = 0$, (h) $-y^2 + 8y - 16 = 0$, (i) $-y^2 + 8y - 11 = 0$.
2. Podaj przykład równania stopnia 2 opisującego (a) parę prostych przecinających się w punkcie $\binom{1}{2}$; (b) parę prostych równoległych do wektora $\binom{1}{2}$; (c) okrąg o promieniu 7 przechodzący przez punkt $\binom{3}{4}$; (d) punkt $\binom{0}{1}$; (e) $\emptyset$; (f) hiperbolę przechodzącą przez $\binom{0}{3}$, taką że kąt między jej asymptotami wynosi $\pi/3$.
3. Znajdź kanoniczne równania poniższych krzywych. Następnie znajdź wektory własne tej macierzy i prostokątny układ współrzędnych w którym równanie staje się kanoniczne. Rozpoznaj i naszkicuj krzywą (na tle oryginalnych współrzędnych).
   (a) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$, (b) $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 1$, (c) $x^2 - 2xy + y^2 = 1$,
   (d) $x^2 - 3y^2 = 0$, (e) $xy + y^2 = 0$, (f) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, (g) $x^2 + xy + y^2 = 0$.
4. Sprowadź do postaci kanonicznej (wraz z wyrażeniem nowych współrzędnych przez stare i starych przez nowe) krzywe: (a) $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 20x - 140y + 125 = 0$, (b) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$.
5. Znajdź oś symetrii obrazu paraboli $y = \sqrt{2}x^2$ przez przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

6. Naszkicuj powierzchnie w $\mathbf{R}^3$: $x^2 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z - y^2 = 0$.
7. Sprowadź poniższe powierzchnie do postaci kanonicznej: napisz macierz odpowiedniej formy kwadratowej; znajdź wartości własne i bazę ortonormalną wektorów własnych; napisz postać kanoniczną równania i macierze P i P^{-1} wiążące współrzedne x, y, z ze współrzędnymi x', y', z' w których postać równania jest kanoniczna. Zidentyfikuj powierzchnię, naszkicuj ją na tle układu współrzędnych $x'y'z'$. Odczytaj z postaci kanonicznej równania jej własności geometryczne (długości półosi, symetrię obrotową lub jej brak, odległość między powłokami, kąty półrozwarcia stożka asymptotycznego itp.). Opisz też położenie powierzchni względem układu xyz (podając kierunki półosi, osi symetrii obrotowej lub osi stożka asymptotycznego itp.).
   (a) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 3$,
   (b) $-4x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 1$,
   (c) $x^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 = 0$,
   (d) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 0$,
   (e) $11x^2 + 4xy - 16xz + 2y^2 + 20yz + 5z^2 = 9$,
   (f) $-2xz + y^2 = 1$,
   (g) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 3$,
   (h) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2zy = 0$,
   (i) $3x^2 - 4xy - 8xz + 2y^2 + 8yz + 8z^2 = 1$,
   (j) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 12xz - 24yz + 18z^2 = 1$.
8. Wiadomo, że powierzchnia stopnia 2 zadana równaniem $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + g = 0$ może być elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową, hiperboloidą dwupowłokową, ... Uzupełnij tę listę rozważając wszystkie możliwe postacie kanoniczne powyższego równania. Uwzględnij także przypadki zdegenerowane, jak np. punkt.
9. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
10. Zidentyfikuj powierzchnię (np. jako elipsoidę, parę płaszczyzn itp.), nie znajdując dokładnych wartości współczynników postaci kanonicznej a jedynie określając ich znaki.
    (a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + 3z^2 = 1$,
    (b) $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 3z^2 = 0$,
    (c) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4z^2 = 1$,
    (d) $-2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 6yx - 2z^2 = 1$.

---

11. Niech $V = \mathbf{R}[X]$, $W = \{P \in V : P(0) = 0\}$. Uzasadnij, że jeśli Q i S należą do tej samej warstwy W, to $Q(0) = S(0)$. Czy jest też odwrotnie? Uzasadnij, że w każdej warstwie W jest dokładnie jeden wielomian stopnia 0. Wyznacz $\dim(V/W)$.

12. Niech $V = \mathbf{R}^3$, zaś W niech będzie prostą w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $x = \frac{y}{3} = -z$.
   a) Sprawdź, czy wektory $v_1 + W$, $v_2 + W$ są lnz w V/W, dla (i) $v_1 = (1,2,3)^\top$, $v_2 = (4,5,6)^\top$; (ii) $v_1 = (2,6,-2)^\top$, $v_2 = (0,1,2)^\top$; (iii) $v_1 = (-1,0,2)^\top$, $v_2 = (0,3,1)^\top$; (iv) $v_1 = (0,0,1)^\top$, $v_2 = (0,1,0)^\top$.
   b) Wskaż bazę B przestrzeni V/W i oblicz $[v_1]_B$, $[v_2]_B$ dla wszystkich powyższych v_1, v_2.
13. Załóżmy, że $v, w \in \mathbf{R}^3$ są lnz. Jaki warunek musi spełniać jednowymiarowa podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^3$, aby $v + W, w + W$ były lz w przestrzeni ilorazowej $\mathbf{R}^3/W$? Rozważ przykład $v = (1,1,0)^\top$, $w = (0,1,1)^\top$.
14. Uzasadnij, że jeśli $W < V$, $(b_1, \dots, b_k)$ jest bazą W zaś $(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$ bazą V, to $(b_{k+1} + W, \dots, b_n + W)$ jest bazą V/W.
15. Niech $V, W < U$, $\dim(U) < \infty$. Uzasadnij, że funkcja $V/(V \cap W) \to (V + W)/W$ dana wzorem $v + V \cap W \mapsto v + W$ jest dobrze określonym izomorfizmem. Wywnioskuj wzór $\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$.
16. Niech $V = W \oplus W'$, i niech $p \colon V \to V/W$ będzie odwzorowaniem ilorazowym $v \mapsto v + W$. Uzasadnij, że $p|_{W'} \colon W' \to V/W$ jest izomorfizmem.

---

17. Niech $a(t) \in \mathbf{R}[t]$ będzie ustalonym wielomianem. Które z następujących funkcji są funkcjonałami liniowymi na $\mathbf{R}_n[t]$: (a) $f(P) = \int_{-1}^{1} a(t)P(t)dt$; (b) $f(P) = \int_0^1 a(t)P(t^2)dt$; (c) $f(P) = \int_0^1 a(t)[P(t)]^2 dt$; (d) $f(P) = P'''(-1)$; (e) $f(P) = P(1)P'(-1)$.
18. Niech v_1, v_2, v_3 oraz w_1, w_2, w_3 będą bazami $\mathbf{R}^3$, zaś v^1, v^2, v^3 oraz w^1, w^2, w^3 bazami $(\mathbf{R}^3)^*$ do nich dualnymi. Przypuśćmy, że $v_2 = w_2$ oraz $v_3 = w_3$. Czy koniecznie musi być tak, że $v^2 = w^2$ i $v^3 = w^3$?
19. Niech $W < V$, $\dim(V) < \infty$, $f \in W^*$. Uzasadnij, że istnieje $F \in V^*$, takie że $F|_W = f$.
20. Uzasadnij, że jeśli $\dim(V) < \infty$, $W < V$, $v \in V \setminus W$, to istnieje $f \in V^*$, takie że $f|_W = 0$, ale $f(v) \neq 0$.
21. Niech $f, g \in V^*$ spełniają $\ker(f) = \ker(g)$. Udowodnij, że istnieje skalar α, taki że $f = \alpha g$.
22. Niech $v_1, \dots, v_k \in V$, $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$. Udowodnij, że jeśli $\det(\phi_i(v_j)) \neq 0$, to (v_j) są lnz w V, zaś (ϕ_i) są lnz w V^*.

---

23. (Najbardziej popularna definicja iloczynu tensorowego)
   Niech T będzie przestrzenią liniową o bazie $\{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$. Określamy podprzestrzeń $Z < T$ jako podprzestrzeń generowaną przez następujące wektory:

$$(v + v', w) - (v, w) - (v', w), \qquad v, v' \in V, w \in W$$

$$(v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \qquad v \in V, w, w' \in W$$

$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w), \qquad v \in V, w \in W, \lambda \in K$$

$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w), \qquad v \in V, w \in W, \lambda \in K.$$

   Uzasadnij, że przestrzeń ilorazowa T/Z wraz z dwuliniowym odwzorowaniem

$$V \times W \ni (v, w) \mapsto (v, w) + Z \in T/Z$$

   jest iloczynem tensorowym V i W (ma WJUF).
24. (Niekonstruktywna konstrukcja iloczynu tensorowego)
   a) Niech $U = \prod_{\phi : V \times W \to Z} Z$, gdzie produkt jest wzięty po wszystkich dwuliniowych odwzorowaniach $\phi \colon V \times W \to Z$ z każdym możliwym Z. Odwzorowanie $\Phi \colon V \times W \to U$ jest diagonalne, tzn $\Phi(v, w) = (\phi(v, w))_\phi$. Określamy $T = \mathrm{Lin}(\Phi(V \times W))$. Uświadom sobie teoriomnogościowe problemy z tą definicją; następnie je zignoruj i uzasadnij, że przestrzeń T wraz z odwzorowaniem $\Phi \colon V \times W \to T$ jest iloczynem tensorowym V i W (ma WJUF).
   b) Jak wykonać tę konstrukcję w zgodzie z obowiązująca teorią mnogości?