Algebra ISIM. Lista 12

1. Niech V będzie przestrzenią liniową, N jej liniowo niezależnym podzbiorem, zaś G podzbiorem V generującym V. Załóżmy, że $N \subseteq G$. Udowodnij, że istnieje baza B przestrzeni V, taka że $N \subseteq B \subseteq G$.
2. Udowodnij, że każde dwie bazy tej samej przestrzeni liniowej są równoliczne.

---

3. Udowodnij wzory: $\langle A \times B, C\rangle = \langle B \times C, A\rangle$; $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$.
4. Uprość wyrażenia: (a) $\langle A, A \times C\rangle$; (b) $\langle A \times (B + A \times C), A\rangle$; (c) $\langle A + A \times B, A + B\rangle$; (d) $\langle D \times (A + D), (A \times B) \times (C \times A)\rangle$.
5. Niech $P = (1, 2, 3)^\top$, niech Π będzie płaszczyzną o równaniu $4x + y - z = 2$, zaś ℓ niech będzie prostą $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-(-2)}{3}$. Napisz nieparametryczne równanie
   (a) płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do Π;
   (b) płaszczyzny przechodzącej przez P i zawierającej ℓ;
   (c) prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do Π;
   (d) prostej przechodzącej przez P i równoległej do ℓ.
   (e) prostej przechodzącej przez P, równoległej do Π i prostopadłej do ℓ;
   (f) płaszczyzny Π' zawierającej ℓ i takiej, że kąt między Π a Π' jest równy kątowi między Π a ℓ.
6. Znajdź równanie nieparametryczne płaszczyzny zawierającej prostą $\frac{x-1}{3} = \frac{-1-2y}{4} = \frac{3z+9}{-6}$ i prostopadłej do płaszczyzny $-x + 4y - 2z = 100$.
7. Udowodnij, że proste $X = A + tB$, $X = C + tD$ zawierają się w pewnej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy gdy $\langle A, B \times D\rangle = \langle C, B \times D\rangle$. Używając tego warunku stwierdź, czy proste $X = (1, 1, 2)^\top + t(7, 1, 0)^\top$, $X = (-6, 0, 2)^\top + t(1, 0, 1)^\top$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jeśli tak, znajdź równanie tej płaszczyzny.
8. Dla każdej ściany F pewnego wielościanu wypukłego narysowano wektor N_F prostopadły do F, skierowany na zewnątrz wielościanu (jeśli zaczepić go gdzieś w środku ściany F), o długości równej polu ściany F. Pokaż, że suma wszystkich narysowanych wektorów jest równa 0. (Wsk. zrób druciany model wielościanu i zanurz go w strumieniu.)
9. Użyj tożsamości z zadania 1 by pokazać, że wysokości trójkąta sferycznego przecinają się w jednym punkcie.

---

10. Kwaternion można zapisać w postaci $z + jw$ dla zespolonych z, w. Opisz mnożenie i sprzężenie kwaternionów używając tej ich reprezentacji.
11. Definiujemy na $\mathbf{H}$ strukturę (prawej) przestrzeni liniowej nad $\mathbf{C}$ określając mnożenie kwaternionu q przez liczbę zespoloną $z = a + bi$ jako kwaternion $q(a + bi)$.
   a) Uzasadnij, że odwzorowanie $\mathbf{H} \ni z + jw \mapsto \binom{z}{w} \in \mathbf{C}^2$ jest izomorfizmem zespolonych przestrzeni liniowych. Standardowa baza $\mathbf{C}^2$ odpowiada przy tym izomorfizmie bazie $B = (1, j)$ przestrzeni $\mathbf{H}$.
   b) Uzasadnij, że dla dowolnego kwaternionu p odwzorowanie $\ell_p : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ dane wzorem $\ell_p(q) = pq$ jest $\mathbf{C}$-liniowe.
   c) Niech $p = z + jw$. Wyznacz macierz ℓ_p w bazie $B = (1, j)$ w terminach liczb z, w.
   d) Sprawdź, że jeśli $|p| = 1$, to ℓ_p jest przekształceniem unitarnym o wyznaczniku 1.
   e) Niech $SU(2)$ oznacza grupę macierzy unitarnych rozmiaru 2×2 o wyznaczniku 1. Uzasadnij, że odwzorowanie $\mathrm{Sp}(1) \ni p \mapsto m_B(\ell_P) \in SU(2)$ jest izomorfizmem grup.
12. Udowodnij, że jeśli każda z liczb m, n jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych, to ich iloczyn mn też jest taką sumą.
13. Opisz złożenie (prawoskrętnych) obrotów: o $\frac{2\pi}{3}$ wokół $(1, 0, 1)^\top$, i o $\frac{\pi}{2}$ wokół $(-1, 1, 0)^\top$. To złożenie jest obrotem: o jaki kąt i wokół jakiego wektora?

---

14. Niech L będzie ciałem zawierającym ciało K (np. $L = \mathbf{C}$, $K = \mathbf{R}$). Wtedy L możemy potraktować jak przestrzeń liniową nad K i zdefiniować $V_L := L \otimes_K V$. Przypominając sobie, że L to jednak ciało, określamy mnożenie wektorów z V_L przez elementy L wzorem $\ell \cdot (\ell' \otimes v) = (\ell\ell') \otimes v$.
   a) Uzasadnij, że V_L z tak określonym mnożeniem przez skalary jaste przestrzenią liniową nad L.
   b) Uzasadnij, że dla $L = \mathbf{C}$, $K = \mathbf{R}$ przestrzeń $V_{\mathbf{C}}$ jest izomorficzna z kompleksyfikacją V.
   c) Udowodnij, że jeśli $B = (b_1, \ldots, b_d)$ jest bazą V (jako przestrzeni liniowej nad K), to $B_L = (1\otimes b_1, \ldots, 1\otimes b_d)$ jest bazą $V_L = L \otimes_K V$ (jako przestrzeni liniowej nad L).

   Od tej chwili do końca listy zakładamy, że charakterystyka K jest równa 0, tzn. że dla każdego naturalnego n mamy $n! \neq 0$ w ciele K.
15. Elementowi $\sigma \in S_n$ grupy permutacji przypisujemy endomorfizm $\ell_\sigma \colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Dany jest on przez warunek $\ell_\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$.
   a) Starannie uzasadnij, że ℓ_σ jest dobrze określonym przekształceniem liniowym.
   b) Pokaż, że dla $\sigma, \tau \in S_n$ zachodzi $\ell_\sigma \circ \ell_\tau = \ell_{\sigma\tau}$.

Definiujemy przestrzenie tensorów symetrycznych i tensorów antysymetrycznych jako

$$S^nV = \{t \in V^{\otimes n} \mid (\forall \sigma \in S_n)(\ell_\sigma(t) = t)\}, \qquad \Lambda^nV = \{t \in V^{\otimes n} \mid (\forall \sigma \in S_n)(\ell_\sigma(t) = \operatorname{sgn}(\sigma)t)\}.$$

(Np. $v\otimes w+w\otimes v \in S^2V$, $v\otimes w-w\otimes v \in \Lambda^2V$.) Definiujemy też odwzorowania symetryzacji $S\colon V^{\otimes n} \to S^nV$ i antysymetryzacji $A\colon V^{\otimes n} \to \Lambda^nV$ wzorami

$$S(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \ell_\sigma(t), \qquad A(t) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ell_\sigma(t).$$

(Np. $S(v \otimes w) = \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v)$, $A(v \otimes w) = \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)$.)

16. Udowodnij, że S, A są rzutami na S^nV, Λ^nV: $S^2 = S$, $\operatorname{Im}(S) = S^nV$, $A^2 = A$, $\operatorname{Im}(A) = \Lambda^nV$.
17. Udowodnij, że $V^{\otimes 2} = S^2V \oplus \Lambda^2V$. Czy dla wyższych potęg tensorowych też będzie to prawdą?

Algebrę tensorową, algebrę symetryczną (bozonów) i algebrę zewnętrzną (fermionów) przestrzeni liniowej V określamy jako

$$TV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}, \qquad SV = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^nV, \qquad \Lambda V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^nV.$$

($V^{\otimes 0} = S^0V = \Lambda^0V = K$.)

18. Uzasadnij, że wzór

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k}) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes v_{n+1} \otimes \ldots \otimes v_{n+k}$$

wyznacza dobrze określone dwuliniowe odwzorowanie $V^{\otimes n} \times V^{\otimes k} \to V^{\otimes(n+k)}$. Kolekcja tych odwzorowań (dla wszystkich możliwych n, k) rozszerza się jednoznacznie do dwuliniowego mnożenia $TV \times TV \to TV$, zwykle oznaczanego po prostu $\otimes$.

19. Uzasadnij, że
 a) wzór $p \cdot q := S(p \otimes q)$ (dla p, q rozkładalnych) wyznacza dwuliniowe mnożenie (symetryczne) w SV;
 a) wzór $p \wedge q := A(p \otimes q)$ (dla p, q rozkładalnych) wyznacza dwuliniowe mnożenie (zewnętrzne) w ΛV.
20. Uzasadnij, że $A(A(p) \otimes q) = A(p \otimes q) = A(p \otimes A(q))$ (dla dowolnych rozkładalnych p, q). Wywnioskuj stąd, że iloczyn zewnętrzny w ΛV jest łączny. Zrób to samo dla algebry symetrycznej SV.
21. Uzasadnij, że jeśli $t = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ i $v_i = v_j$ dla pewnych $i \neq j$, to $A(t) = 0$. (W szczególności $v \wedge v = 0$ dla $v \in V$.)
22. Uzasadnij, że dla rozkładalnego tensora t i permutacji $\sigma \in S_n$ mamy $A(\ell_\sigma(t)) = \operatorname{sgn}(\sigma)A(t)$, $S(\ell_\sigma(t)) = S(t)$. (W szczególności $v \wedge w = -w \wedge v$, $v \cdot w = w \cdot v$ dla $v, w \in V$.)
23. Uzasadnij, że $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$, $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n = S(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$. (Lewe strony są dobrze określone dzięki łączności mnożenia.)
24. Niech $\dim V = d < \infty$, i niech $B = (b_1, \ldots, b_d)$ będzie bazą V.
 a) Uzasadnij, że $\{b_{i_1} \cdot \ldots \cdot b_{i_n} \mid 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n \leq d\}$ jest bazą S^nV. Wyznacz $\dim S^nV$ i $\dim SV$.
 a) Uzasadnij, że $\{b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq d\}$ jest bazą Λ^nV. Wyznacz $\dim \Lambda^nV$ i $\dim \Lambda V$.
25. Uzasadnij, że $v_1, \ldots, v_n \in V$ są lnz $\iff$ $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$.
26. Udowodnij, że jeśli $t \in \Lambda^2K^3$, to $t = v \wedge w$ dla pewnych $v, w \in K^3$.
27. Udowodnij, że jeśli $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Lin}(w_1, \ldots, w_n)$, to $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ i $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ są proporcjonalne w Λ^nV. Czy jest też odwrotnie?
28. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe. Określmy $F^{\otimes n}\colon V^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$ przez warunek $F^{\otimes n}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = F(v_1)\otimes\ldots\otimes F(v_n)$. W oparciu o tą definicję określ $TF\colon TV \to TW$, $S^nF\colon S^nV \to S^nW$, $\Lambda^nF\colon \Lambda^nV \to \Lambda^nW$.
29. Udowodnij, że

$$\chi_F(x) = \sum_{n=0}^{d} \operatorname{tr}(\Lambda^{d-n}F)(-x)^n.$$

30. Zinterpretuj:
 a) formę kwadratową na przestrzeni V – jako element $S^2(V^*)$;
 b) funkcję wielomianową na przestrzeni V – jako element $S(V^*)$;
 c) wyznacznik (funkcję układu d wektorów z d-wymiarowej przestrzeni V) – jako element $\Lambda^d(V^*)$.
31. Zbadaj, czy $\operatorname{Lin}(\{v \otimes \ldots \otimes v \mid v \in V\}) = S^nV$.