Algebra ISIM 1. Lista 2

1. Uzasadnij, że zbiór rozwiązań układu równań liniowych n zmiennych o zerowych prawych stronach jest podprzestrzenią K^n.

2. Dla poniższych układów równań znajdź rozwiązanie ogólne.
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

3. Wyznacz rozwiązanie ogólne, a następnie odczytaj z niego bazę przestrzeni rozwiązań układu.
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Dla jakich prawych stron układy z poprzedniego zadania pozostają niesprzeczne?

5. Znajdź wielomian $P(X)$ stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych, taki że $P(-2) = 1$, $P(-1) = 3$, $P(1) = 13$ i $P(2) = 33$.

6. Opisz wszystkie podprzestrzenie $\mathbf{R}^3$.

7. Podaj przykład 4-elementowego podzbioru $\mathbf{R}^3$, w którym zawarte są jedynie 3 bazy $\mathbf{R}^3$.

8. W zbiorze $A = \{(0,0,0,0)^\top, (1,0,1,0)^\top, (1,2,1,3)^\top, (2,2,2,3)^\top, (0,0,0,1)^\top\}$ wskaż podzbiór, który jest bazą $\mathrm{Lin}(A)$ (rzecz dzieje się w $\mathbf{R}^4$).

9. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbf{R}^5$ zadanej układem równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. (Uzasadnij, że jest to naprawdę baza.)

10. Uzasadnij, że jeśli (u, v, w) jest bazą V, to również $(u + v, u + 2v + w, w)$ jest bazą V.

11. Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami:
a) $C(\mathbf{R})$: $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(7) = 0\}$, $\{f \in C(\mathbf{R}) : f(12) \geq f(-12)\}$;
b) przestrzeni $c = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} : a_n \in \mathbf{R}\}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych: $\{(a_n) : (\forall n \geq 0)(a_{n+3} = a_{n+1} - 3a_n)\}$, $\{(a_n) : a_{17} + a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_{17} = a_{100}^3 = 0\}$, $\{(a_n) : a_5 + a_7 + a_{15} = 0\}$;
c) $\mathbf{R}^3$ – podzbiory określone przez równania: $z^2 = x^2 + 2y^2$, $x + y + 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;
d) przestrzeni wielomianów $\mathbf{R}[X]$: wielomiany stopnia 7, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P'(2) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(-1) + P(4) = 0\}$, $\{P \in \mathbf{R}[X] : P''(2) + P(0)^2 = 0\}$,

12. Podaj przykład dwóch baz (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że (a_1, b_2, b_3) jest bazą $\mathbf{R}^3$, ale (b_1, a_2, a_3) nie jest bazą $\mathbf{R}^3$.

13. Czy prawdą jest, że jeśli $B = (b, b_2, b_3)$ i $C = (c, b_2, b_3)$ są bazami $\mathbf{R}_2[X]$, to dla dowolnego $P \in \mathbf{R}_2[X]$ ostatnie dwie współrzędne P w bazie B są takie same jak ostatnie dwie współrzędne P w bazie C?

14. Napisz jawnym wzorem izomorfizm $F : \mathbf{R}^3 \to V$, dla (a) $V = \{(x, y, z, t)^\top \in \mathbf{R}^4 : x + 2y + z + 3t = 0\}$; (b) $V = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P''(0) = P(1) = 0\}$. W przypadku b) oblicz $F^{-1}(X - X^3)$.

15. Załóżmy, że $\dim(V) = n$, $W < V$, $\dim(W) = k$. Uzasadnij, że istnieje izomorfizm $F : V \to K^n$, taki że $F[W] = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^\top : x_1, \ldots, x_k \in K\}$. Napisz taki izomorfizm wzorem dla $V = \mathbf{R}_3[X]$, $W = \{P \in V : P'(1) + P(0) = 0\}$.

---

16. (W ciele:) Element a' spełniający $a + a' = a' + a = 0$ nazywamy przeciwnym do a i oznaczamy $-a$. Element a' spełniający $aa' = a'a = 1$ nazywamy odwrotnym do a i oznaczamy a^{-1}. Udowodnij, że element przeciwny / odwrotny jest jedyny. Udowodnij, że $(-1) \cdot a = -a$.

17. (W przestrzeni liniowej:) Wektor v' spełniający $v + v' = v' + v = 0$ nazywamy przeciwnym do v i oznaczamy $-v$. Udowodnij, że wektor przeciwny jest jedyny; wykaż, że $-v = (-1) \cdot v$.

18. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi (a, b to skalary, v, w – wektory): $a(-v) = (-a)v = -av$; $av = 0 \iff (a = 0 \vee v = 0)$; $av + bw = bv + aw \iff (a = b \vee v = w)$.

19. Uzasadnij lub obal (A, B to dowolne podzbiory dowolnej przestrzeni liniowej): $\mathrm{Lin}(A \cup B) = \mathrm{Lin}(A) + \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(A \cap B) = \mathrm{Lin}(A) \cap \mathrm{Lin}(B)$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Lin}(A) \subseteq \mathrm{Lin}(B)$, $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(A)) = \mathrm{Lin}(A)$.

20. Załóżmy, że $B \subseteq V$, $\mathrm{Lin}(B) = V$, $|B| = \dim V < \infty$. Udowodnij, że B jest bazą V.

21. Udwodnij, że zbiór funkcji potęgowych $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
22. Czy jest prawdą, że dla dowolnego ciała K zbiór funkcji potęgowych $\{x^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ jest lnz w przestrzeni $F(K, K)$ wszystkich funkcji z K w K?

---

23. Uzasadnij, że zbiór $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami jest ciałem.
24. Niech $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Udowodnij, że $((\varphi^n)_n, ((-\varphi)^{-n})_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid (\forall n \geq 0)(a_n \in \mathbf{R}) \wedge (\forall n \geq 2)(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})\}$.
25. Udowodnij, że zbiór funkcji $\{\cos(nx) \mid n = 0, 1, \ldots\} \cup \{\sin(nx) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ jest lnz w $C(\mathbf{R})$.
26. Wskaż możliwie duży liniowo niezależny podzbiór przestrzeni $V = \{P \in \mathbf{R}[X] : P'(-1) = 0\}$.
27. Ile k-wymiarowych podprzestrzeni ma n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem q-elementowym?

Głównym celem wykładu jest przedstawienie podstawowych pojęć i metod algebry liniowej.

1. Liczby zespolone.
2. Gaussa metoda eleminacji.
3. Przestrzenie liniowe, podprzestrzenie liniowe, liniowa niezależność, baza. Wymiar przestrzeni liniowej, izomorficzność przestrzeni tego samego wymiaru.
4. Przekształcenia liniowe, jądro, obraz, tw. o indeksie. Macierz przekształcenia liniowego, składanie i odwracanie przekształceń.
5. Grupa permutacji, znak permutacji. Wyznacznik i jego własności.
6. Tw. Kroneckera–Capellego, rząd macierzy, równość rzędu wierszowego i rzędu kolumnowego. Minory a rząd macierzy, wzory Cramera.
9. Konstrukcje przestrzeni liniowych: suma prosta, przestrzeń dualna i bidualna, przestrzeń ilorazowa, iloczyn tensorowy.
7. Formy kwadratowe, diagonalizacja metodą Lagrange'a, dodatnia określoność, kryterium Sylvestera, sygnatura.
8. Przestrzeń euklidesowa, baza ortonormalna, proces Grama–Schmidta; przekształcenie sprzężone, operator samosprzężony, twierdzenie spektralne.
10. Kompleksyfikacja. Diagonalizacja rzeczywista i zespolona; przestrzenie unitarne, rzuty prostopadłe, przekształcenia ortogonalne i unitarne.
11. Diagonalizacja formy kwadratowej w bazie ortonormalnej, rozkład biegunowy. Postać kanoniczna równania kwadryki.
12. Objętość i macierz Grama.
13. Rozkład Jordana endomorfizmu.
14. Iloczyn wektorowy. Geometria prostych i płaszczyzn w $\mathbf{R}^3$. Kwaterniony i izometrie $\mathbf{R}^3$.

Zaliczenie na podstawie 3 kolokwiów (po 20 pkt.) i aktywności na ćwiczeniach (do 20 pkt.) Próg na zaliczenie: 30 pkt., w tym co namniej 20 z kolokwiów.