Algebra ISIM 1. Lista 3

1. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe. Uzasadnij, że $\mathrm{Im}(F) < W$.
2. Narysuj w układzie współrzędnych obraz siatki $\{\binom{x}{y} : (x \in \mathbf{Z}) \vee (y \in \mathbf{Z})\}$ przez przekształcenie liniowe zadane macierzą: (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (b) $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; (c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Znajdź macierz liniowego przekształcenia płaszczyzny A wiedząc że (a) $A\binom{5}{0} = \binom{3}{1}$, $A\binom{0}{7} = \binom{-2}{3}$, (b) $A\binom{4}{1} = \binom{2}{3}$, $A\binom{1}{-1} = \binom{0}{1}$.
4. Podaj przykład macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, takiej że $\dim\ker(F_A) = \dim\mathrm{Im}(F_A) = 1$ i $\ker(F_A) = \mathrm{Im}(F_A)$.
5. Niech $F : \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym. Jaki może być wymiar $\ker(F)$? Jaki może być wymiar Im(F)? A jak będzie dla $F : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^{100}$?
6. Z twierdzenia Bezout wywnioskuj, że jeśli wielomian stopnia ≤ 13 zeruje się w $1, 2, 3, \ldots, 14$, to musi on być wielomianem zerowym. Używając tw. o indeksie wywnioskuj stąd, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia ≤ 13 taki że $P(1) = a_1, P(2) = a_2 \ldots, P(14) = a_{14}$. [Zdefiniuj odpowiednie przekształcenie liniowe z $\mathbf{R}_{13}[X]$ w $\mathbf{R}^{14}$.]
7. Ile jest przekształceń liniowych $\mathbf{F}_3^2 \to \mathbf{F}_3^3$?

---

8. Które z następujących przekształceń $F\colon \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ są liniowe?

a) $F(P(X)) = P(2X+3)$;
b) $F(P(X)) = P'''(X)$;
c) $F(P(X)) = P'(X) + P(1)$;
d) $F(P(X)) = P(X+1) - P(X)$.

9. Dla liniowych przekształceń F z poprzedniego zadania wyznacz $\ker(F)$ oraz $\mathrm{Im}(F)$.
10. Oblicz wymiary następujących przestrzeni:
$\{P \in \mathbf{R}_{50}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$,
$\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} \mid \sum_{i=1}^{100} (-1)^i x_i = \sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_{2i} = 0\}$,
$\{(x_1, \ldots, x_{100})^\top \in \mathbf{R}^{100} \mid \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i-1} = 0\}$,
$\{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid XP'''(X) + P''(X) = 0, P'(-1) + P(0) = 0\}$,
$\{P \in \mathbf{R}_{100}[X] \mid P'(-1) = P(1) = P'(0) = 0\}$.
11. Uzasadnij, że symetria osiowa względem prostej przechodzącej przez 0 jest liniowym przekształceniem $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Wyznacz macierz takiej symetrii, jeśli jej osią jest prosta o równaniu $y = (\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})x$.
12. Macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jest macierzą obrotu $\mathbf{R}^3$ wokół pewnej osi. Znajdź oś tego obrotu.
13. Podaj przykład macierzy A rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych, takiej że

a) $\dim\ker(F_A) = 1$, $\dim\mathrm{Im}(F_A) = 2$ i $\ker(F_A) < \mathrm{Im}(F_A)$;
b) $\dim\mathrm{Im}(F_A) = 1$, $\dim\ker(F_A) = 2$ i $\mathrm{Im}(F_A) < \ker(F_A)$.

14. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe i będzie bijekcją. Sprawdź, że przekształcenie odwrotne $F^{-1}\colon W \to V$ też jest liniowe.
15. Załóżmy, że $F\colon V \to W$ jest liniowe, i że $\dim V = \dim W < \infty$. Uzasadnij równoważność warunków:

a) F jest bijekcją (izomorfizmem);
b) F jest injekcją (jest różnowartościowe);
a) F jest surjekcją (jest "na").

16. Udowodnij lub obal:

a) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lz.
b) Jeśli układ wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest lnz, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to układ wektorów $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ też jest lnz.

17. Niech $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ będzie jednym z ciągów Fibonacciego (tzn. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \geq 0$). Niech $X_n = \binom{f_{n+1}}{f_n}$. Znajdź macierz $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, taką że wzór $X_{n+1} = AX_n$ zachodzi dla wszystkich $n \geq 0$.

18. Niech $B \in M_{(k+1)\times n}(\mathbf{R})$ będzie macierzą otrzymaną z $A \in M_{k\times n}(\mathbf{R})$ przez dopisanie (u dołu) jednego wiersza. Czy może się zdarzyć, że wymiar $\mathrm{Im}(F_B)$ jest mniejszy niż wymiar $\mathrm{Im}(F_A)$?
19. Uzasadnij, że zbiór prawych stron dla których układ o ustalonej macierzy głównej A jest niesprzeczny jest podprzestrzenią liniową; uzasadnij, że wymiar tej podprzestrzeni plus wymiar przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego (tj. o zerowych prawych stronach) o tej samej macierzy głównej A jest równy liczbie kolumn A.
20. Niech dla $i = 0, \ldots, n$ funkcja $f_i : V_i \to V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym, przy czym $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ (dla $i = 0, \ldots, n-1$). Załóżmy ponadto, że $V_0 = V_{n+1} = \{0\}$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim(V_i) = 0$.

---

21. W dowolnym ciele K rozważmy zbiór sum jedynek $\{0, 1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$. Udowodnij, że jeśli ten zbiór jest nieskończony, to najmniejsze podciało ciała K zawierające $\{0, 1\}$ jest izomorficzne z ciałem liczb wymiernych $\mathbf{Q}$.
22. Niech $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie izometrią (funkcją zachowującą odległości punktów), taką że $F(0) = 0$. Udowodnij, że F jest przekształceniem liniowym.
23. Udowodnij, że identyczność jest jedynym endomorfizmem ciała $\mathbf{R}$. To znaczy, pokaż, że jeśli $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia warunki

$$(\forall x, y \in \mathbf{R})(\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)), \qquad (\forall x, y \in \mathbf{R})(\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1,$$

to $\varphi = \mathrm{Id}$ – czyli $(\forall x \in \mathbf{R})(\varphi(x) = x)$.
24. Udowodnij, że jeśli $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jest bijekcją przeprowadzającą proste na proste i spełniającą $F(0) = 0$, to F jest przekształceniem liniowym:
a) Uzasadnij, że jeśli dodatkowo wiemy, że $F\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$ i $F\binom{0}{1} = \binom{0}{1}$, to F ograniczone do osi OX jest endomorfizmem $\mathbf{R}$. Dalej, pokaż że takie F jest identycznością na całym R^2.
b) Udowodnij tezę zadania w pełnej ogólności używając wyniku z punktu a).