Algebra ISIM 1. Lista 4

1. Niech macierzą przekształcenia $F : V \to W$ względem baz: (e_1, e_2, e_3) przestrzeni V i (f_1, f_2) przestrzeni W, będzie $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.
2. Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $F(P) = (P(-1), P'(0), P(1))^\top$. Niech $B = \{1, X, X^2\}$ będzie bazą $\mathbf{R}_2[X]$, zaś $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ bazą standardową $\mathbf{R}^3$. (a) Znajdź $M_E^B(F)$. (b) Niech $C = \{E_1 + 2E_3, E_3, E_2 + E_1\}$. Znajdź $m_C^B(F)$. (c) Czy F jest odwracalne?
3. Niech $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $F((x, y, z)^\top) = (2x + z, x + y + z, y - z)^\top$. Niech $B = ((1, 0, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top, (1, 1, 0)^\top)$. Znajdź (jeśli to możliwe) bazę C przestrzeni $\mathbf{R}^3$, taką że (a) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
4. Wiadomo, że B, C, D to bazy $\mathbf{R}^3$, zaś $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Co więcej, $B = ((1, 1, 1)^\top, (0, 1, 1)^\top, (0, 1, 0)^\top)$, $m_D^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_B^C(F) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Znajdź D.
5. Czy jest odwracalne przekształcenie $\mathbf{R}_{22}[X] \ni P \mapsto P'' + 3P' + 2P \in \mathbf{R}_{22}[X]$?
6. Znajdź macierze odwrotne do następujących:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
7. Niech E_j^i będzie macierzą która ma jedynkę na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny, zaś zera na pozostałych miejscach $(i \neq j)$. Uzasadnij, że $(I + \lambda E_j^i)^{-1} = I - \lambda E_j^i$.

---

8. Opisz układem równań liniowych zbiór $\mathrm{Lin}\{(1, 2, 1, -2)^\top, (-1, 3, 4, 0)^\top, (-1, 8, 9, -2)^\top\}$.
(Tzn. znajdź układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest podany zbiór.)
9. Wytłumacz, jak mając układ równań opisujący podprzestrzeń $W < \mathbf{R}^n$ i wektor $v \in \mathbf{R}^n$ wyznaczyć układ równań opisujący zbiór $v + W$. Opisz zbiór $\{(1, 0, -1, 1)^\top + t(1, 2, 1, -2)^\top + s(-1, 3, 4, 0)^\top + u(-1, 8, 9, -2)^\top : t, s, u \in \mathbf{R}\}$ układem równań.
10. Udowodnij, że jeśli $F : V \to W$ jest monomorfizmem, to istnieje przekształcenie liniowe $G : W \to V$, takie że $G \circ F = \mathrm{Id}$ (Dlaczego nie wynika stąd, że każdy monomorfizm jest izomorfizmem?). Znajdź macierze dwóch różnych takich G dla $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadanego macierzą $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
11. Udowodnij, że jeśli $W < V$, zaś $f : W \to U$ jest przekształceniem liniowym, to istnieje przekształcenie liniowe $F : V \to U$, takie że f jest obcięciem F do W. Znajdź takie F dla $V = \mathbf{R}_2[X]$, $W = \{P \in \mathbf{R}_2[X] : P(3) = 0\}$, $U = \mathbf{R}_1[X]$, $f(P) = \frac{P(X)}{X-3}$.
12. Dla przestrzeni liniowych V, W nad ciałem K oznaczmy przez $\mathrm{Hom}(V, W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych z V do W. Przekształcenia takie można dodawać i mnożyć przez skalary. Sprawdź, że $\mathrm{Hom}(V, W)$ z tymi operacjami jest przestrzenią liniową.
13. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o wymiarach n, k i bazach B, C. Zdefiniuj dodawanie i mnożenie przez skalary na zbiorze macierzy $M_{k\times n}(K)$ tak, by funkcja $\Phi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{k\times n}(K)$ dana wzorem $\Phi(F) = m_C^B(F)$ była izomorfizmem przestrzeni liniowych. Jaki jest wymiar przestrzeni $\mathrm{Hom}(V, W)$?
14. Udowodnij, że przekształcenie liniowe jest odwracalne $\iff$ jest izomorfizmem.
15. Niech $A \in M_{n\times n}(K)$.

a) Uzasadnij, że jeśli operacjami wierszowymi da się przerobić macierz A na macierz z zerowym wierszem, to A nie jest odwracalna.

b) Uzasadnij, że operacjami wierszowymi można przerobić A albo na I, albo na macierz z zerowym wierszem. Opisz algorytm, który to robi.

16. Udowodnij, że $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (o ile $ad - bc \neq 0$).

17. Uzasadnij następujące tw. Kroneckera-Capellego: układ $AX = Y$ ma rozwiązanie $\iff$ $r(A) = r(A|Y)$.

18. Udowodnij, że

a) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;

b) $r(AB) \leq r(A)$;

c) $r(BA) \leq r(A)$;

d) jeśli B jest odwracalna, to w b) i c) zachodzą równości.

(W każdym podpunkcie zakładamy, że rozmiary macierzy A i B pozwalają wykonać wskazane działanie.)

---

19. Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Udowodnij, że jeśli $AB = I$, to $BA = I$.

20. Niech E^i_j będzie macierzą która ma jedynkę na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny, zaś zera na pozostałych miejscach. Uzasadnij, że operację wierszową "dodaj do i-tego wiersza wiersz j-ty pomnożony przez λ" można opisać jako "zamień macierz A na iloczyn $(I + \lambda E^i_j)A$". Opisz podobnie pozostałe operacje wierszowe i kolumnowe.

21. Każda z ośmiu macierzy $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ ma następującą własność: $F_A[\mathbf{Z}^2] = \mathbf{Z}^2$. Czy są inne macierze A o tej własności?

22. Podaj przykład przestrzeni liniowej (nieskończenie wymiarowej) V i jej endomorfizmu $F : V \to V$, który (a) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem; (b) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem.

23. Załóżmy, że $B = (b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Niech $C = (c_1, \ldots, c_n)$ będą dane przez $c_j = \sum_i A^i_j b_i$, dla pewnej macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$. Udowodnij, że C jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą odwracalną.

24. Niech $F\colon V \to W$ będzie liniowe, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = k$. Niech też $A = (A_1, \ldots, A_n) \in M_{k\times n}(K)$. Rozważmy pytanie: "Czy istnieją bazy: B przestrzeni V i C przestrzeni W, takie że $m^B_C(F) = A$?" Udowodnij, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \mathrm{Lin}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \mathrm{Im(F)}$.