Algebra ISIM. Lista 5

1. Permutację $\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{2\,3\,7\,5\,4\,6\,1}$ przedstaw w postaci (a) iloczynu transpozycji; (b) iloczynu transpozycji postaci $(i, i+1)$. Postaraj się znaleźć przedstawienia z możliwie małą liczbą czynników.

2. Uzasadnij wzór $(i-1,i)(i,i+1)(i-1,i) = (i,i+1)(i-1,i)(i,i+1)$.

3. Wyjaśnij które z podanych iloczynów (i z jakim znakiem) występują w rozwinięciu wyznacznika odpowiedniego (jakiego?) stopnia: a) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; b) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; c) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

4. Wykorzystując wzór na pełne rozwinięcie wyznacznika (lub inaczej) oblicz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \frac12 & \frac13 & \frac12 & 1 \\ \frac13 & \frac12 & 1 & \frac12 \\ \frac12 & 1 & \frac12 & \frac13 \\ 1 & \frac12 & \frac13 & \frac12 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

6. Jak zmieni się wartość wyznacznika $n \times n$ jeśli:

a) znak każdego z jego wyrazów zmienić na przeciwny? b) każdy element $a_{ij}$ pomnożyć przez $c^{i-j}$, $c \neq 0$?

c) pierwszą kolumnę przestawić na ostatnie miejsce, a pozostałe przesunąć w lewo, zachowując ich porządek?

d) wiersze zapisać w odwrotnym porządku?

7. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

9. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

---

10. Uzasadnij, że każde $\sigma \in S_n$ można przedstawić jako iloczyn transpozycji $(1,2), (1,3), (1,4), \dots (1,n)$.

11. Niech $V$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $K$, zaś $\phi\colon V \times V \to K$ funkcją dwuliniową.

a) Uzasadnij, że jeśli $\phi$ jest alternująca ($\phi(X,X)=0$), to jest też ona antysymetryczna ($\phi(X,Y)=-\phi(Y,X)$).

b) Uzasadnij, że jeśli $\phi$ jest antysymetryczna oraz $1+1\neq 0$, to $\phi$ jest alternująca.

12. Podaj przykład niezerowej funkcji $\Phi : M_{3\times 2}(K) \to K$, która jest wieloliniową i antysymetryczną funkcją kolumn; uzasadnij, że nie istnieje funkcja $\Psi : M_{2\times 3}(K) \to K$ o tych własnościach.

13. Sprawdź, że $AA^\vee = A^\vee A = (\det A)I$.

14. Udowodnij wzór Cauchy'ego–Bineta: $\det(AB) = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\ldots<i_n\le k} A_{i_1,\ldots,i_n} B^{i_1,\ldots,i_n}$.

(Zakładamy, że: $A \in M_{n\times k}(K)$; $B \in M_{k\times n}(K)$; $A_{i_1,\ldots,i_n}$ to macierz utworzona z kolumn $A$ o numerach $i_1,\ldots,i_n$; $B^{i_1,\ldots,i_n}$ to macierz utworzona z wierszy $B$ o numerach $i_1,\ldots,i_n$)

15. Udowodnij, że jeśli $A$, $B$ są macierzami kwadratowymi, oraz $AB=I$, to i $BA=I$.

16. Udowodnij, że jeśli $F : V \to V$, a $B$ i $C$ są bazami $V$, to $\det(m_B(F)) = \det(m_C(F))$.

17. Uzasadnij, że dla dwóch wektorów $U,V \in \mathbf{R}^2$ zachodzi równoważność: $\det(U,V)>0 \iff$ najkrótszy kąt obrotu od $U$ do $V$ jest przeciwzegarowy.

---

18. Wyznacz największą możliwą wartość wyznacznika $3\times 3$, którego wszystkie wyrazy są co do wartości bezwzględnej nie większe od 1.

19. Oblicz podane wyznaczniki (w drugim z nich $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$):

$$\begin{vmatrix} \cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \ldots & \cos(x_1-y_n) \\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \ldots & \cos(x_2-y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \ldots & \cos(x_n-y_n) \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

20. Udowodnij, że jeśli dla każdej pary $i \neq j$ zachodzi $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$, to $\det(a_{ij}) \neq 0$.

21. Udowodnij, że jeśli dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \ldots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \ldots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$, to $f_1,\ldots,f_n$ są lnz (w przestrzeni wszystkich funkcji z $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).

22. Spróbuj użyć odpowiedniej wersji poprzedniego zadania do pokazania liniowej niezależności zbioru funkcji: $\{x^n \mid n=0,1,\ldots\}$.

23. Pokaż, że $\det((x_i+y_j)^{-1}) = \Pi_{i>j}(x_i-x_j)(y_i-y_j)/\Pi_{i,j}(x_i+y_j)$. (Jest to tzw. wyznacznik Cauchy'ego.)

24. Po $\mathbf{Z}$ spaceruje losowo $n$ policjantów; każdy ma własną monetę, co minutę nią rzuca, na orła robi krok długości 1 w prawo, a na reszkę krok długości 1 w lewo. Niech $a_1<\ldots<a_n$, $b_1<\ldots<b_n$ będą liczbami parzystymi; niech $p_{ij}$ oznacza prawdopodobieństwo, że policjant wychodzący z $a_i$ po godzinie znajdzie się w $b_j$. Udowodnij, że prawdopodobieństwo tego, że $n$ policjantów zaczynających spacer w $a_1,\ldots,a_n$ po godzinie znajdzie się w $b_1,\ldots,b_n$, przy czym po drodze żadni dwaj się nie spotkają, wynosi $\det(p_{ij})$.

25. Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$.