Algebra ISIM. Lista 6

1. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Znajdź wartości i wektory własne. Dla każdej wartości własnej porównaj krotność algberaiczną i geometryczną.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Które z poniższych przekształceń $\mathbf{R}^2$ w $\mathbf{R}^2$ diagonalizują się? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
(a) R_θ, (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) D_r (jednokładność o skali r), (d) P_U (rzut prostopadły na prostą $\mathrm{Lin}(U)$).
4. Znajdź wektory i wartości własne dla następujących endomorfizmów $\mathbf{R}^3$ (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
5. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
6. Przedstaw macierz $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.
7. Zdiagonalizuj macierz M: znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
8. Napisz warunek na liczby rzeczywiste a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ma dwie różne rzeczywiste wartości własne.
9. Oblicz wielomian charakterystyczny $F\colon \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$, jeśli (a) $F(P(X)) = P'(X)$; (b) $F(P(X)) = P(3X+1)$.

---

10. Zbadaj diagonalizowalność macierzy: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
11. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ – która z tych macierzy diagonalizuje się, a która nie?
12. Oblicz: (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)^{50}$; (b) $\left(\begin{smallmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{smallmatrix}\right)^{64}$.
13. Oblicz $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -7 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{1232} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
14. Znajdź możliwie dużo $X \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ spełniających równanie $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
15. Ciąg Fibonacciego jest zadany rekurencyjnie wzorami $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu według następującego planu:
 a) Niech $X_n = \binom{f_n}{f_{n+1}}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pokaż, że $X_0 = \binom{1}{1}$, $X_{n+1} = MX_n$, $X_n = M^n X_0$.
 b) Zdiagonalizuj macierz M: znajdź jej wartości własne i wektory własne i zapisz ją w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną.
 c) Znajdź wzór na M^n i wywnioskuj z niego wzór na f_n.
 d) Jak zmieni się odpowiedź, jeśli przyjąć $f_0 = 7$, $f_1 = 3$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$.
16. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -3a_n + 10a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

17. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

18. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?

19. Znajdź swój ulubiony dowód faktu, że trzy niezerowe wektory własne odpowiadające trzem różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

---

20. Niech $A, B \in M_{n\times n}(k)$. Udowodnij, że: (a) $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$; (b) $(A^\vee)^\top = (A^\top)^\vee$; (c) $(tA)^\vee = t^{n-1}A^\vee$; (d) $(A^\vee)^\vee = (\det(A))^{n-2}A$.

21. Podaj przykład przekształcenia liniowego F, takiego że $\chi_F(x) = 7 - 2x + 7x^2 - 4x^3 + x^4$.

22. Podaj przykład dwóch macierzy (kwadratowych, tego samego rozmiaru) o wyrazach w ciele 2-elementowym, których wielomiany charakterystyczne są różne, ale zadają tą samą funkcję na ciele 2-elementowym.

23. Niech F i G będą diagonalizowalnymi endomorfizmami V, które są przemienne: $F\circ G = G\circ F$. Udowodnij, że F i G dają się zdiagonalizować we wspólnej bazie. (Tzn. istnieje baza V, której każdy wektor jest wektorem własnym zarówno F, jak i G.)

24. Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, zaś U niech będzie dowolnym wektorem. Zbadaj jak szybko rośnie długość wektora M^nU gdy n dąży do nieskończoności. (Uzasadnij, że istnieje stała C zależna (jak?) od wektora U, taka że granica $\lim_{n\to+\infty} \frac{|M^nU|}{C^n}$ jest liczbą dodatnią.)

25. Udowodnij prawdziwość zdania: $(\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))((\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R})(\exists P \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))(A = P\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)P^{-1}) \iff ((\exists \lambda \in \mathbf{R})(A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)) \vee (\exists a, b \in \mathbf{R})(a \neq b \wedge \det(A - aI) = 0 \wedge \det(A - bI) = 0)))$.