Algebra ISIM. Lista 7

1. Czy $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni

a) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,3)^\top\}), \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}, \{(t,0,0)^\top : t\in\mathbf{R}\}$?

b) $\{(x,y,z)^\top : x+y+z=0\}, \{(x,y,z)^\top : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}\}$?

c) $\mathrm{Lin}(\{(1,2,1)^\top, (-2,1,3)^\top\}), \mathrm{Lin}(\{(1,6,7)^\top\})$? d) $\{(x,y,z)^\top : x+2y-z=0\}, \mathrm{Lin}(\{(1,2,-1)^\top\})$?

2. Udowodnij, że (a) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A\in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = A\} \oplus \{A\in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : A^\top = -A\}$; (b) $M_{n\times n}(\mathbf{R}) = \{A\in M_{n\times n}(\mathbf{R}) : \mathrm{tr}(A)=0\} \oplus \{tI : t\in\mathbf{R}\}$.

3. Czy jest prawdą, że (w punkcie b przyjmujemy $\epsilon = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$)

a) $\mathbf{R}_{12}[X] = \{P\in\mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \le 6\} \oplus \{P\in\mathbf{R}_{12}[X] : \text{stopień } P \text{ jest } \ge 7\}$?

b) $\mathbf{C}[X] = \{P\in\mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = P(X)\} \oplus \{P\in\mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon P(X)\} \oplus \{P\in\mathbf{C}[X] : P(\epsilon X) = \epsilon^2 P(X)\}$?

4. Pewne trzy proste w $\mathbf{R}^3$ przechodzące przez 0 mają tę własność, że kąt między każdymi dwoma z nich jest $> 60°$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{R}^3$ jest sumą prostą tych trzech prostych?

5. Niech $V = V_1 \oplus V_2$.

a) Pokaż, że jeśli $F_i : V_i \to W$ są liniowe, to istnieje jedyne liniowe $F : V\to W$, takie że $F|_{V_i} = F_i$. $(i=1,2)$

b) Załóżmy, że $F, G : V\to W$ są liniowe. Udowodnij, że jeśli $F|_{V_1} = G|_{V_1}$, $F|_{V_2} = G|_{V_2}$, to $F=G$.

6. Niech $F : V\to W$.

a) Czy jeśli $V = V_1\oplus V_2$, to $\mathrm{Im}(F) = F[V_1]\oplus F[V_2]$?

b) Czy jeśli $W = W_1\oplus W_2$, to $V = F^{-1}[W_1]\oplus F^{-1}[W_2]$?

c) Czy jeśli $V = V_1\oplus V_2$ i $F|_{V_1}$, $F|_{V_2}$ są $1-1$, to F jest $1-1$?

d) Czy jeśli $W = W_1\oplus W_2$ i $W_1, W_2 \subseteq \mathrm{Im}(F)$, to F jest na?

7. Niech $W = W_1\oplus W_2$. Czy jest prawdą, że $\mathrm{Hom}(V,W) = \mathrm{Hom}(V,W_1)\oplus\mathrm{Hom}(V,W_2)$?

8. Znajdź (jakąś) podprzestrzeń dopełniczą do $W < V$, jeśli (a) $V = \mathbf{R}^3$, $W = \mathrm{Lin}(\{(1,2,0)^\top, (0,1,1)^\top\})$; (b) $V = \mathbf{R}_4[X]$, $W = \{P\in\mathbf{R}_4[X] : P'(1) + 2P(0) = 0\}$;

9. Podaj przykład podprzestrzeni $U, V, W < \mathbf{R}^4$, takich że $\mathbf{R}^4 = U\oplus V = V\oplus W = W\oplus U$.

---

10. Uzasadnij równoważność warunków definiujących liniową niezależność układu podprzestrzeni:

a) $(\forall v_1\in V_1, \ldots, v_n\in V_n)(v_1+\ldots+v_n = 0 \Rightarrow v_1 = \ldots = v_n = 0)$;

b) $(\forall i)(V_i \cap \sum_{j\ne i} V_j = \{0\})$.

11. Załóżmy, że $\dim V < \infty$, $V_1,\ldots,V_n < V$. Uzasadnij równoważność warunków:

a) $V = \oplus_i V_i$;

b) $V_1,\ldots,V_n$ generują V oraz $\sum_i \dim V_i \le \dim V$.

12. Niech $V_1, V_2 < V$, $\dim(V) < \infty$. Uzasadnij równoważność warunków:

a) $V = V_1\oplus V_2$;

b) $V_1\cap V_2 = 0$ i $V_1+V_2 = V$;

c) $V_1\cap V_2 = 0$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$;

d) $V_1+V_2 = V$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$.

13. Niech $V_1, V_2, V_3 < V$. Załóżmy, że $\dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3) = \dim(V)$, $V_2\cap V_3 = \{0\}$, $V_1\cap(V_2+V_3) = \{0\}$. Udowodnij, że $V = V_1\oplus V_2\oplus V_3$. Uogólnij na większą liczbę podprzestrzeni.

14. Załóżmy, że u, v i $u+v$ są wektorami własnymi F. Udowodnij, że $u+2v$ też jest wektorem własnym F.

---

15. Niech F będzie skończonym zbiorem. Załóżmy, że każdemu jego podzbiorowi A jest przypisana podprzestrzeń V_A pewnej przestrzeni liniowej V, przy czym dla dowolnych $A, B\subseteq F$ mamy $V_{A\cap B} = V_A\cap V_B$. Niech V^A będzie podprzestrzenią V_A dopełniczą do $\sum_{B\subset A} V_B$. Czy jest prawdą, że $V_F = \oplus_{A\subseteq F} V^A$?

16. Niech $E, F, H \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Załóżmy, że $HE - EH = 2E$, $HF - FH = -2F$, $EF - FE = H$. Udowodnij, że wartości własne macierzy H są liczbami całkowitymi. (Prawdą jest też, że H jest diagonalizowalna, ale tego na razie nie dasz rady udowodnić. Przykład: $E = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $F = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $H = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$. To zadanie jest częścią zadania o klasyfikacji reprezentacji półprostych algebr Liego.)

---

17. Które z poniższych funkcji są formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych? Które są ponadto symetryczne? Napisz ich macierze w wybranych przez siebie bazach.

a) $\Phi\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$: $\Phi(x,y) = x^\top y$, $\Phi(x,y) = y^\top x$.

b) $\Phi\colon M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$, $\Phi(A,B) = \det(AB)$, $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB^\top)$, $\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(A+B)$.

c) $\Phi\colon \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: $\Phi(P_1,P_2) = P_1(2)P_2(1)$.

18. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Niech E będzie standardową bazą $\mathbf{R}^2$, zaś $B = (\binom{1}{2}, \binom{1}{1})$.

a) Załóżmy, że $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jest przekształceniem liniowym, i że $m_E^E(F) = A$. Wyznacz $m_B^B(F)$.

b) Załóżmy, że $\Phi\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest formą dwuliniową, i że $m^{EE}(\Phi) = A$. Wyznacz $m^{BB}(\Phi)$.

19. Niech $\Phi\colon \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ będzie dane wzorem $\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)^\top, (y_1,y_2,y_3,y_4)^\top) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$.

a) Sprawdź, że Φ jest antysymetryczna.

b) Podaj przykład podprzestrzeni $U < \mathbf{R}^4$, takiej że $\dim U = 1$ oraz $U < U^\perp$.

c) Podaj przykład podprzestrzeni $U < \mathbf{R}^4$, takiej że $\dim U = 2$ oraz $U = U^\perp$.

d) Podaj przykład podprzestrzeni $U < \mathbf{R}^4$, takiej że $\dim U = 3$ oraz $U^\perp < U$.

W poniższych zadaniach $\dim(V) < \infty$, *a* $\Phi\colon V \times V \to K$ *jest formą dwuliniową.*

20. Niech B, C, D, E będą bazami V. Zdefiniuj $m^{BC}(\Phi)$ i wyprowadź wzór wiążący $m^{BC}(\Phi)$ z $m^{DE}(\Phi)$.

21. Określmy $\ker_L(\Phi) = \{v \in V \mid (\forall w \in V)(\Phi(v,w) = 0)\}$, $\ker_R(\Phi) = \{w \in V \mid (\forall v \in V)(\Phi(v,w) = 0)\}$. Niech B będzie bazą V. Wykaż równoważność warunków:

a) $\det m^{BB}(\Phi) \neq 0$;

b) $\ker_L(\Phi) = \{0\}$;

c) $\ker_R(\Phi) = \{0\}$.

22. Udowodnij, że $D = S \oplus A$, gdzie D oznacza przestrzeń wszystkich form dwuliniowych na V, S to podprzestrzeń form symetrycznych, zaś A to podprzestrzeń form antysymetrycznych.