Algebra ISIM 1. Lista 8

Q jest zwykle formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wektor $v \in V$ nazywamy *izotropowym,* jeśli $Q(v) = 0$. Zakładamy, że $1 + 1 \neq 0$. Forma jest dodatnio/ujemnie półokreślona, jeśli jest nieujemna/niedodatnia na każdym wektorze.

1. Znajdź $m^{BB}(Q)$: $Q((x, y, z)^\top) = x^2 + 5xy + 3yz + yx - 2z^2$, $B = ((1, 0, 1)^\top, (-1, -1, 1)^\top, (0, 1, 3)^\top)$.
2. Metodą Lagrange'a sprowadź do postaci diagonalnej formy $x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.
3. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone: $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$; $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$; $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$;
4. Uzupełnij do bazy $\mathbf{R}^4$ ortogonalnej względem standardowego iloczynu skalarnego:
(a) $\{(1, -2, 2, -3)^\top, (2, -3, 2, 4)^\top\}$; (b) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^\top\}$.
5. W $\mathbf{R}^4$ za standardowym iloczynem skalarnym znajdź ortogonalną bazę podprzestrzeni:
(a) $\mathrm{Lin}((1, 2, 2, -1)^\top, (1, 1, -5, 3)^\top, (3, 2, 8, -7)^\top)$;
(b) $\mathrm{Lin}((2, 1, 3, -1)^\top, (7, 4, 3, -3)^\top, (1, 1, -6, 0)^\top, (5, 7, 7, 8)^\top)$.
6. (i) Uzasadnij, że obcięcie formy kwadratowej do podprzestrzeni jest formą kwadratową. (ii) Ogólniej, uzasadnij, że jeśli $F : W \to V$ jest liniowe, zaś $Q : V \to K$ jest formą kwadratową, to $Q \circ F : W \to K$ jest formą kwadratową.
7. Podaj kryterium ujemnej określoności macierzy analogiczne do kryterium Sylvestera.

---

8. Niech Φ będzie symetryczną niezdegenerowaną formą dwuliniową na (skończenie wymiarowej) przestrzeni liniowej V. Niech $U, W < V$. Czy jest prawdą, że:
a) $(U^\perp)^\perp = U$;
b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$;
c) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
9. Jak zmienia się baza przy diagonalizacji metodą Lagrange'a?
a) Załóżmy, że w pewnej bazie (b, c) forma ma postać $Q(xb+yc) = x^2 + xy + y^2$. Zmieniamy wtedy współrzędne na $x' = x + \frac{1}{2}y$, $y' = y$. Wyraź przez b, c bazę (b', c') odpowiadającą tym nowym współrzędnym.
b) To samo dla $xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2 = (x')^2 - (y')^2$.
10. Wyznacz symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.
11. Zbadaj dodatnią określoność form: (a) $\Phi(x, y) = x^\top y$ ($\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$); $\Phi : M_{n\times n}(\mathbf{R}) \times M_{n\times n}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$: (b) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$, (c) $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB^\top)$, $\Phi : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$: (d) $\Phi(P_1, P_2) = P_1(2)P_2(1)$.
12. Znajdź sygnaturę formy: $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$; $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$; $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$; $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
13. Uzasadnij, że każda forma kwadratowa na przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbf{C}$ ma w odpowiednio dobranym liniowym układzie współrzędnych postać $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$ (dla pewnego k nie większego niż wymiar przestrzeni i zależącego od formy).
14. Symetryczne macierze 2×2 o wyrazach rzeczywistych tworzą przestrzeń liniową. Jaki jest jej wymiar? Zidentyfikuj i naszkicuj podzbiór tej przestrzeni składający się z macierzy dodatnio określonych.
15. Udowodnij lub obal: (a) Jeśli macierz 3×3 ma wszystkie wyrazy dodatnie, to jest dodatnio określona; (b) suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona; (c) iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.
16. Czy jest prawdą, że symetryczna macierz A jest dodatnio półokreślona (tzn. $(\forall X)(X^\top AX \ge 0)$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne?
17. Podaj przykład formy kwadratowej Q na pewnej przestrzeni V oraz dwóch wektorów izotropowych $v, w \in V$, takich że $Q(v + w) \neq 0$.
18. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Udowodnij równoważność warunków:
a) A jest macierzą pewnej formy dodatnio określonej;
b) $(\forall X \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})(X^\top AX > 0)$.

19. Udowodnij, że dodatnio określona macierz ma dodatni wyznacznik; i, w konsekwencji, dodatnie minory główne.

---

20. Niech $\Phi\colon V \times V \to K$ będzie formą antysymetryczną.
a) Udowodnij, że istnieje liczba parzysta $2k \leq n$ oraz baza $B = (b_1, \ldots, b_n)$ przestrzeni V, taka że $\Phi(b_{2i-1}, b_{2i}) = -\Phi(b_{2i}, b_{2i-1}) = 1$ dla $i \leq k$, $\Phi(b_i, b_j) = 0$ dla pozostałych par (i, j).
b) Uzasadnij, że jeśli Φ jest niezdegenerowana, to n jest parzyste.
c) Uzasadnij, że wyznacznik rzeczywistej macierzy antysymetrycznej jest zawsze nieujemny.

21. Załóżmy, że funkcja $Q : V \to K$ spełnia warunki: (a) $(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$ jest formą dwuliniową; (b) $(\forall v \in V)(Q(-v) = Q(v))$. Udowodnij, że Q jest formą kwadratową. Czy warunek (b) jest istotny?

22. Uzasadnij, że forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz da się zapisać w postaci $M^\top M$ dla pewnej macierzy M. Możliwie podobnym warunkiem scharakteryzuj macierze dodatnio określone.

23. $(K = \mathbf{R})$ Załóżmy, że zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią. Wykaż, że wtedy (a) Q jest półokreślona; (b) jeśli $v, w \in V$, przy czym v jest wektorem izotropowym, to $Q(v, w) = 0$.

24. Formy kwadratowe Q, Q' na przestrzeni liniowej V nazywamy *liniowo równoważnymi,* jeśli istnieje odwracalne przekształcenie liniowe $F : V \to V$, takie że $Q' = Q \circ F$. Uzasadnij, że formy kwadratowe Q, Q' określone na rzeczywistej przestrzeni liniowej V są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.

25. Jaki jest maksymalny możliwy wymiar izotropowej podprzestrzeni (tzn. podprzestrzeni, której każdy wektor jest izotropowy) w przestrzeni liniowej wymiaru n z formą kwadratową sygnatury (p, q)?

26. Ze skończonym grafem (niezorientowanym, bez krawędzi wielokrotnych, bez pętli), wiążemy macierz (a_{ij}): numerujemy wierzchołki grafu i kładziemy $a_{ij} = -1$ jeśli i-ty i j-ty wierzchołek są połączone krawędzią, $a_{ij} = 0$ jeśli nie są, oraz $a_{ii} = 2$ dla każdego i. Znajdź wszystkie grafy dla których dostaje się dodatnio określoną macierz.