Algebra ISIM 1. Lista 9

Wszystko dzieje się w $\mathbf{R}^n$ lub w przestrzeni euklidesowej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Znajdź rzut prostopadły wektora $(5, 2, -2, 2)$ na $W = \mathrm{Lin}((2, 1, 1, -1)^\top, (1, 1, 3, 0)^\top, (1, 2, 8, 1)^\top)$ i na $W^\perp$.
2. Zadaj układem równań dopełnienie ortogonalne przestrzeni zadanej układem $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$
3. Wyznacz odległość punktu $(3, 3, -4, 2)^\top$ od podprzestrzeni zadanej układem równań $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
4. Napisz macierz rzutu prostopadłego na podprzestrzeń zadaną równaniem $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.
5. Znajdź pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $(1, 5, 2, 1, 3)^\top, (-1, 4, 2, -2, 0)^\top$, oraz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(1, 2, 3, 4)^\top, (1, -1, 0, 1)^\top, (0, 1, 1, -1)^\top$.
6. Znajdź odległość punktu $(1, 2, 3, 4)^\top$ od płaszczyzny $\mathrm{Lin}(\{(1, -1, 1, -1)^\top, (0, 1, 2, -1)^\top\})$.
7. Oblicz n-wymiarową objętość równoległościanu rozpiętego przez n wektorów:

a) $(1, -1, 1, -1)^\top, (1, 1, 1, 1)^\top, (1, 0, -1, 0)^\top, (0, 1, 0, -1)^\top$;

b) $(1, 0, 0, 2, 5)^\top, (0, 1, 0, 3, 4)^\top, (0, 0, 1, 4, 7)^\top, (2, -3, 4, 11, 12)^\top, (0, 0, 0, 0, 1)^\top$.

8. Oblicz kąt między główną przekątną n-wymiarowej kostki foremnej a jej k-wymiarową ścianą.

---

9. Niech $W, U < V$. Czy jest prawdą, że (a) $P_W \circ P_U = P_{W\cap U}$? (b) $P_W + P_{W^\perp} = Id$?
10. Udowodnij, że symetryczna macierz $M \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ (a) jest macierzą Grama pewnego liniowo niezależnego układu n wektorów w $\mathbf{R}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest dodatnio określona; (b) jest macierzą Grama pewnego układu n wektorów w $\mathbf{R}^n$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest dodatnio półokreślona.
11. Czy istnieje iloczyn skalarny na $\mathbf{R}^3$, taki że cosinusy kątów między wektorami E_1, E_2, E_3, wynoszą $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$?
12. Udowodnij, że dla $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ zachodzi nierówność (Hadamarda) $(\det(A))^2 \le \Pi_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)$.
13. Niech $W < V$, zaś B niech będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej V. Udowodnij, że każdy wyraz macierzy $m_B^B(P_W)$ jest co do modułu nie większy niż 1.
14. Wykaż, że suma kwadratów długości rzutów wektorów dowolnej bazy ortonormalnej na k-wymiarową podprzestrzeń jest równa k.
15. Uzasadnij, że jeśli W, U są podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej V, zaś $x \in w+W$, $y \in u+U$ punktami, to $d(x, y) = \min\{d(a, b) : a \in w + W, b \in u + U\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \perp W$ i $x - y \perp U$.
16. Niech W, U będą podprzestrzeniami V. Niech $Z = (W + U)^\perp$, $x \in w + W$, $y \in u + U$. Uzasadnij, że odległość zbiorów $w + W$, $u + U$ wynosi $\|P_Z(x - y)\|$. (Odległość zbiorów A, B to $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$; w razie kłopotów załóż, że w naszym przypadku to infimum jest realizowane przez pewną parę punktów.) Oblicz odległość zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ od zbioru $(0, 2, 6, -5)^\top + \mathrm{Lin}((-7, 1, 1, 1)^\top, (-10, 1, 2, 3)^\top)$.
17. Czy jest przekształceniem ortogonalnym (a) przekształcenie odwrotne do ortogonalnego? (b) suma dwóch przekształceń ortogonalnych? (c) złożenie dwóch przekształceń ortogonalnych?

---

18. Wykaż, że objętość równoległościanu spełnia $V(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \le V(a_1, \ldots, a_k)V(b_1, \ldots, b_l)$.
19. Wykaż, że jeśli układ k wektorów w n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni euklidesowej ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \le n + 1$.
20. Uzasadnij, że w $\mathbf{R}_n[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ odległość X^n od $\mathrm{Lin}\{1, X, \ldots, X^{n-1}\}$ wynosi $\left(\binom{2n}{n}\sqrt{2n+1}\right)^{-1}$.
21. W przestrzeni $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ wyznacz dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$.
22. W przestrzeni funkcji gładkich (nieskończenie wiele razy różniczkowalnych) o okresie 2π z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\Delta(f) = -f''$. Uzasadnij, że Δ jest przekształceniem samosprzężonym. Znajdź możliwie dużo wektorów własnych Δ i sprawdź bezpośrednim rachunkiem ich ortogonalność.

Algebra ISIM 1. Lista 10

Wszystko dzieje się w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej/unitarnej V, chyba że treść zadania mówi inaczej.

1. Sprawdź, że (a) $F_{\mathbf{C}}$ jest $\mathbf{C}$-liniowe; (b) określony na wykładzie iloczyn skalarny na kompleksyfikacji przestrzeni euklidesowej rzeczywiście jest zespolonym iloczynem skalarnym.
2. Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej macierze:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Uzasadnij, że jeśli B, C są ortonormalnymi bazami V, to $m_B^C(Id)$ jest macierzą unitarną/ortogonalną.
4. Wyznacz postać kanoniczną i bazę ortonormalną w której jest ona przyjmowana dla ortogonalnych przekształceń $\mathbf{R}^n$ zadanych w bazie standardowej macierzami:
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$
5. Wyznacz ortonormalną bazę wektorów własnych i macierz w tej bazie przekształcenia unitarnego, zadanego w pewnej bazie ortonormalnej macierzą: $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$
6. Uzupełnij układ $(1,-1,i,0)^\top, (-1,0,i,-i)^\top$ do ortogonalnej bazy $\mathbf{C}^4$.
7. Niech $C = (b_1, b_1+b_2)$, gdzie $B = (b_1, b_2)$ jest bazą ortonormalną V; niech $m_B^B(T) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdź $m_C^C(T^*)$.

---

8. Udowodnij, że (a) $(T^*)^* = T$; (b) $(T+S)^* = T^* + S^*$; (c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$; (d) $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$; (e) $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$.
9. Niech $T = T^*$. Udowodnij, że wektory własne T odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe.
10. Udowodnij, że jeśli $U : V \to V$ jest przekształceniem unitarnym, zaś $T = T^*$, to UTU^{-1} jest samosprzężone.
11. Niech T będzie rzutem (tzn. niech spełnia $T^2 = T$ – wyjaśnij skąd nazwa). Udowodnij, że następujące warunki są równoważne: (a) $T = T^*$; (b) $TT^* = T^*T$; (c) $\mathrm{Im}(T) = (\ker(T))^\perp$.
12. Uzasadnij, że jeśli $|v| = |w|$, to istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne F, takie że $F(v) = w$.
13. Które przekształcenia ortogonalne są samosprzężone?
14. Uzasadnij, że jeśli ortogonalne przekształcenie $\mathbf{R}^6$ ma rzeczywistą wartość własną, to ma też przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.
15. Niech U będzie macierzą unitarną. Uzasadnij, że wszystkie wyrazy U^{100} są co do modułu nie większe niż 1.
16. Uzasadnij, że jeśli v i w są niezerowymi wektorami własnymi pewnego przekształcenia unitarnego odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $v \perp w$.
17. Załóżmy, że $(b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą ortonormalną V, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym, takim że $(F(b_1), \ldots, F(b_n))$ też jest bazą ortonormalną V. Uzasadnij, że F jest ortogonalne/unitarne.
18. (V zespolona, $A, B : V \to V$ liniowe)
 a) Uzasadnij, że jeśli A jest unitarne a 1 nie jest jego wartością własną, to $B = i(A - Id)^{-1}(A + Id)$ jest samosprzężone.
 b) Uzasadnij, że jeśli B jest samosprzężone, to $A = (B - iId)^{-1}(B + iId)$ jest unitarne.
19. Załóżmy, że $v, w \in \mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_k\})$, oraz że $\langle v, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wykaż, że $v = w$.

---

20. Niech $v_1, \ldots, v_k$, $w_1, \ldots, w_k$ spełniają, dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, warunek $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne U, takie że $U(v_i) = w_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
21. (V zespolona) Uzasadnij, że każde przekształcenie liniowe $V \to V$ jest kombinacją liniową czterech przekształceń unitarnych.
22. (V zespolona) Przekształcenie T nazywamy *normalnym,* jeśli $TT^* = T^*T$. Udowodnij, że przekształcenie normalne diagonalizuje się w bazie ortonormalnej.