Lech Jankowski, Grzegorz Szkapiak

Algebra Liniowa

(na podstawie wykładu Jana Dymary z roku 2003/2004)

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Spis treści

Rozdział 1. Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ 1
§1.1. Pojęcia wstępne 1
§1.2. Iloczyn skalarny 4
§1.3. Proste na płaszczyźnie 9
§1.4. Wyznacznik pary wektorów 13
§1.5. Liniowa niezależność 15
§1.6. Układy równań liniowych 18

Rozdział 2. Przekształcenia liniowe $\mathbb{R}^2$ i macierze 23
§2.1. Pojęcia wstępne 23
§2.2. Macierz przekształcenia liniowego 24
§2.3. Obraz i przeciwobraz przez przekształcenie liniowe 28
§2.4. Złożenie przekształceń 29
§2.5. Odwracalność przekształceń 31
§2.6. Wyznacznik macierzy 33

Rozdział 3. Izometrie płaszczyzny 39
§3.1. Izometrie 39
§3.2. Klasyfikacja izometrii 41

Rozdział 4. Diagonalizacja 47
§4.1. Wektory i wartości własne 47
§4.2. Baza wektorów własnych 51
§4.3. Rozkład Jordana 53

Rozdział 5. Krzywe drugiego stopnia 57
§5.1. Formy kwadratowe 57
§5.2. Krzywe drugiego stopnia 59

Rozdział 6. Liczby zespolone 65
§6.1. Wstęp 65
§6.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej 67
§6.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej 68
§6.4. Równania algebraiczne 71

Rozdział 7. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ 75
§7.1. Pojęcia wstepne 75
§7.2. Iloczyn wektorowy 77
§7.3. Proste w przestrzeni 79
§7.4. Płaszczyzny w przestrzeni 81
§7.5. Wyznacznik trzech wektorów 84
§7.6. Układy równań liniowych 87

Rozdział 8. Przekształcenia liniowe $\mathbb{R}^3$ i macierze 89
§8.1. Wstęp 89
§8.2. Macierz przekształcenia liniowego 89
§8.3. Przykłady przekształceń 91
§8.4. Jądro i obraz 95
§8.5. Wyznacznik macierzy 96
§8.6. Odwracalność przekształceń 97
§8.7. Diagonalizacja i rozkład Jordana 101

Rozdział 9. Izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ 109
§9.1. Izometrie 109
§9.2. Klasyfikacja izometrii $\mathbb{R}^3$ 111

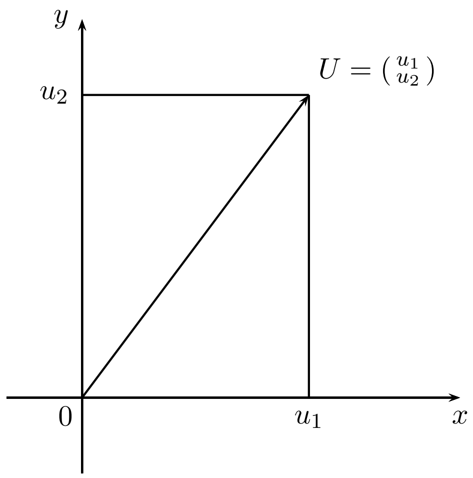
Rozdział 10. Powierzchnie drugiego stopnia 113
§10.1. Macierze symetryczne 113
§10.2. Formy kwadratowe 114
§10.3. Powierzchnie drugiego stopnia 116

Rozdział 1

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$

1.1. Pojęcia wstępne

Definicja 1.1. *Płaszczyzną rzeczywistą* nazywamy zbiór
$\mathbb{R}^2 \stackrel{\text{df}}{=} \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x, y \in \mathbb{R}\}$.



Rysunek 1

Punkt na płaszczyźnie utożsamiać będziemy z parą liczb oznaczających jego współrzędne kartezjańskie. Dla wygody (to, że tak będzie wygodniej okaże się później) zapisywać je będziemy w konwencji kolumnowej czyli jedna nad drugą $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Wektorem wodzącym punktu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ nazywamy strzałkę łączącą punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ z punktem $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Punkty płaszczyzny będziemy utożsamiali z ich wektorami wodzącymi i będziemy je nazywać wektorami.

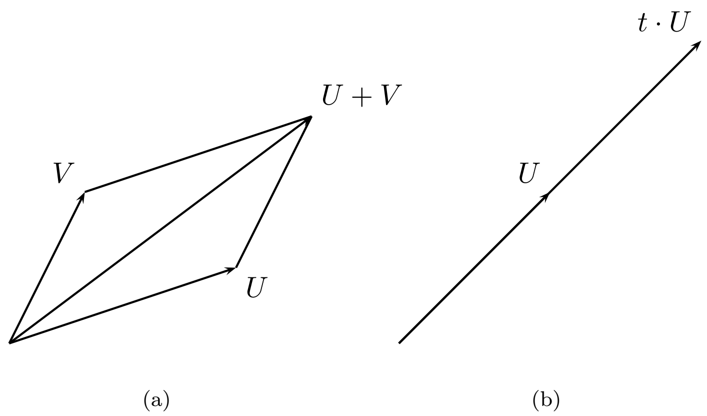
Dla uproszczenia zapisu wektor zerowy $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ będziemy oznaczać po prostu przez 0.

Określamy dodawanie wektorów jako dodawanie odpowiednich współrzędnych i mnożenie wektora przez liczbę jako mnożenie przez tę liczbę obu współrzędnych. (por. rys. 2(a) oraz 2(b))

$$\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$t\cdot\left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}t\cdot u_1\\t\cdot u_2\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Liczbę, przez którą mnożymy wektor nazywamy skalarem, ponieważ wynik mnożenia tU to przeskalowany wektor U.



Rysunek 2

Zbiór wszystkich skalarnych wielokrotności niezerowego wektora U, tzn. zbiór $\{tU : t\in\mathbb{R}\}$ wyznacza pewną prostą na płaszczyźnie.

Przyjmijmy

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

Każdy wektor $U = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\end{smallmatrix}\right)$ można zapisać w postaci

$$U = u_1E_1 + u_2E_2.$$

Wektory E_1 oraz E_2 nazywamy *wersorami osi* układu współrzędnych na płaszczyźnie. Oś wyznaczoną przez E_1, tzn. zbiór $\{tE_1 : t\in\mathbb{R}\}$ nazywamy osią *odciętych*, zaś oś wyznaczoną przez E_2 — osią *rzędnych*.

Definicja 1.2. *Kombinacją liniową* wektorów U i V nazywamy wektor $W = \lambda U + \mu V$, gdzie $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Pokażemy, że przedstawienie wektora $U \in \mathbb{R}^2$ w postaci kombinacji liniowej wektorów E_1 i E_2 jest jedyne. Gdyby istniały dwie możliwości zapisu $U = u_1E_1 + u_2E_2 = u_1'E_1 + u_2'E_2$, mielibyśmy

$$0 = U - U = (u_1E_1 + u_2E_2) - (u_1'E_1 + u_2'E_2) =$$

$$(u_1 - u_1')E_1 + (u_2 - u_2')E_2 \ , \quad \text{tzn.} \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 - u_2' \end{pmatrix},$$

czyli $u_1 = u_1'$ oraz $u_2 = u_2'$ a zatem te dwa sposoby zapisu nie byłyby tak naprawdę różne.

Zbiór $\mathcal{E}_2 = \{E_1, E_2\}$ nazywać będziemy *standardową bazą* przestrzeni $\mathbb{R}^2$, zaś wektory E_1 oraz E_2 — *standardowymi wektorami bazowymi* przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Stwierdzenie 1.3 (Aksjomaty przestrzeni liniowej)**.** *Dla dowolnych wektorów U, V, W oraz liczb rzeczywistych α, β mamy*

(1) $(U + V) + W = U + (V + W)$ *(łączność dodawania wektorów)*
(2) $U + V = V + U$ *(przemienność dodawania wektorów)*
(3) $U + 0 = U$
(4) *istnieje jedyny wektor $\tilde{U}$ taki, że $U + \tilde{U} = 0$*
(5) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$
(6) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$
(7) $(\alpha\beta)U = \alpha(\beta U)$
(8) $1 \cdot U = U$

Występujący w punktach (3) i (4) znak 0 oznacza oczywiście wektor zerowy. Aksjomaty te są bezpośrednią konsekwencją własności działań na liczbach rzeczywistych. Istotnie, np. przemienność dodawania wektorów sprowadza się do przemienności dodawania liczb rzeczywistych, bowiem dla dowolnych wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right), V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ mamy

$$U+V = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = V+U,$$

gdzie równość oznaczona symbolem $*$ wynika z przemienności dodawania liczb rzeczywistych.

Naturalne jest zatem pytanie o sens ich wprowadzenia skoro są naturalnymi konsekwencjami własności liczb rzeczywistych. Okazuje się jednak, że istnieje wiele obiektów spełniających powyższe aksjomaty. Zamiast badać te obiekty każdy z osobna, rozwinięto ogólną teorię przestrzeni liniowych. Dzięki temu po sprawdzeniu czy dany obiekt/zbiór/przestrzeń/struktura spełnia powyższe aksjomaty, znamy cały zestaw twierdzeń, faktów i własności, które ta przestrzeń posiada.

1.2. Iloczyn skalarny

Definicja 1.4. *Iloczynem skalarnym* wektorów $U = \binom{u_1}{u_2}$ oraz $V = \binom{v_1}{v_2}$ nazywamy liczbę $u_1v_1 + u_2v_2$. Iloczyn skalarny wektorów U i V oznaczamy symbolem $\langle U, V\rangle$.

Uwaga 1.5. Spotykane są również inne oznaczenia iloczynu skalarnego, jak np. $(U|V)$, $U \circ V$, $U \cdot V$, nie będziemy ich tu jednak stosować.

Stwierdzenie 1.6. *Dla dowolnych wektorów U, V, W i skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące własności*

(1) *dwuliniowość iloczynu skalarnego*
   (a) $\langle \alpha U + \beta V, W\rangle = \alpha \langle U, W\rangle + \beta \langle V, W\rangle$ *(liniowość względem 1. zmiennej)*
   (b) $\langle U, \alpha V + \beta W\rangle = \alpha \langle U, V\rangle + \beta \langle U, W\rangle$ *(liniowość względem 2. zmiennej)*

(2) $\langle U, V\rangle = \langle V, U\rangle$ *(symetryczność)*

(3) $\langle U, U\rangle \geq 0$*, przy czym* $\langle U, U\rangle = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $U = 0$ *(dodatnia określoność)*

Definicja 1.7. *Normą* (*długością*) wektora U nazywamy liczbę $\|U\| \overset{\text{df}}{=} \sqrt{\langle U, U\rangle}$.

Twierdzenie 1.8 (Równość równoległoboku)**.** *Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi równość*

$$\|U + V\|^2 + \|U - V\|^2 = 2\left(\|U\|^2 + \|V\|^2\right). \tag{1.3}$$

Dowód. Niech U i V będą dowolnymi wektorami. Wówczas (z definicji 1.7 oraz ze stwierdzenia 1.6) mamy:

$$\begin{aligned}
\|U + V\|^2 + \|U - V\|^2 &= \langle U + V, U + V\rangle + \langle U - V, U - V\rangle = \\
&= \langle U, U\rangle + \langle U, V\rangle + \langle V, U\rangle + \langle V, V\rangle + \\
&\quad + \langle U, U\rangle - \langle U, V\rangle - \langle V, U\rangle + \langle V, V\rangle = \\
&= 2\langle U, U\rangle + 2\langle V, V\rangle = 2\left(\|U\|^2 + \|V\|^2\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Zauważmy, iż twierdzenie 1.8 mówi po prostu, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego boków.

Twierdzenie 1.9 (Wzór polaryzacyjny)**.** *Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi równość*

$$\langle U, V\rangle = \frac{1}{4}\left(\|U + V\|^2 - \|U - V\|^2\right). \tag{1.4}$$

Dowód. Niech U i V będą dowolnymi wektorami. Wtedy (z definicji 1.7 oraz ze stwierdzenia 1.6) mamy:

$$\begin{aligned}\|U+V\|^2 - \|U-V\|^2 &= \langle U+V, U+V\rangle - \langle U-V, U-V\rangle = \\ &= \langle U,U\rangle + \langle U,V\rangle + \langle V,U\rangle + \langle V,V\rangle - \\ &\quad - (\langle U,U\rangle - \langle U,V\rangle - \langle V,U\rangle + \langle V,V\rangle) = \\ &= 4\langle U,V\rangle .\end{aligned}$$

■

Lemat 1.10. *Niech U oraz V będą dowolnymi wektorami. Wówczas równość $\|U-V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle U,V\rangle = 0$.*

Dowód. Niech U i V będą dowolnymi wektorami. Z definicji 1.7 oraz ze stwierdzenia 1.6 mamy:

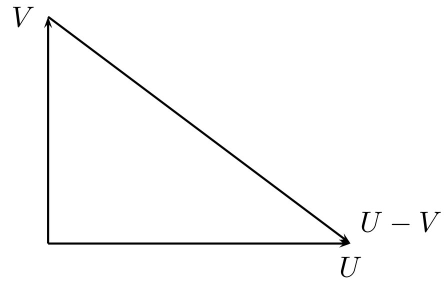
$$\begin{aligned}\|U-V\|^2 &= \langle U-V, U-V\rangle = \langle U, U-V\rangle - \langle V, U-V\rangle = \\ &= \langle U,U\rangle - \langle U,V\rangle - \langle V,U\rangle + \langle V,V\rangle = \\ &= \|U\|^2 - 2\langle U,V\rangle + \|V\|^2\end{aligned} \tag{1.5}$$

■

Fakt 1.11. *Niech U i V będą dowolnymi wektorami różnymi od zera. Wówczas $\langle U,V\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy U jest prostopadły do V ($U \perp V$).*

Dowód.
$(\Longrightarrow)$

Niech $U \perp V$. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa mamy $\|U-V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2$ (por. rys. 3), co (na mocy lematu 1.10) jest równoważne temu, że $\langle U,V\rangle = 0$.



Rysunek 3

$(\Longleftarrow)$

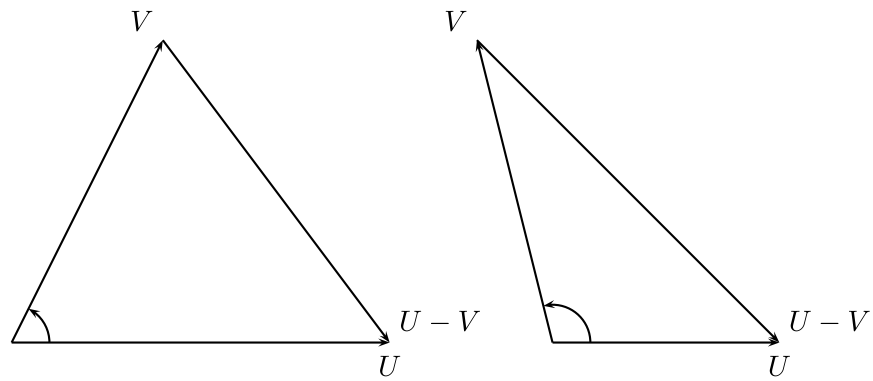
Niech teraz $\langle U,V\rangle = 0$, co na mocy lematu 1.10 jest równoważne temu, że $\|U-V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa mamy, że $U \perp V$. ■

W świetle powyższego faktu możemy przyjąć zerowanie się iloczynu skalarnego za definicję prostopadłości wektorów. Przy takiej definicji wektor zerowy jest prostopadły do każdego innego wektora a nawet do samego siebie!

Uwaga 1.12. Dla niezerowych wektorów U i V mamy

(1) Gdy kąt między wektorami U i V jest ostry (por. rys. 4(a)), to $\|U-V\|^2 < \|U\|^2+\|V\|^2$. Wynika stąd w szczególności nierówność $\langle U, V\rangle > 0$ (patrz dowód lematu 1.10).

(2) Gdy kąt między wektorami U i V jest rozwarty (por. rys. 4(b)), to $\|U-V\|^2 > \|U\|^2+\|V\|^2$. Wynika stąd w szczególności, iż $\langle U, V\rangle < 0$ (patrz dowód lematu 1.10).



(a) (b)

Rysunek 4

Z faktu 1.11 wynika, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ wektory $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right)$ są prostopadłe. Podobnie, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \perp \left(\begin{smallmatrix} y \\ -x \end{smallmatrix}\right)$.

Przykład 1.13. Znajdziemy wektor prostopadły do wektora $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, mający długość 1. Jak zauważyliśmy wcześniej $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \perp \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Trzeba znaleźć takie $t \in \mathbb{R}$, aby $\left\|t\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\| = 1$. Mamy

$$
\begin{aligned}
1 &= \left\|t\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\| = \sqrt{\left\langle t\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), t\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle} = \sqrt{\left\langle \left(\begin{smallmatrix} -2t \\ t \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2t \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\rangle} = \\
&= \sqrt{4t^2+t^2} = \sqrt{5t^2} = |t|\sqrt{5},
\end{aligned}
$$

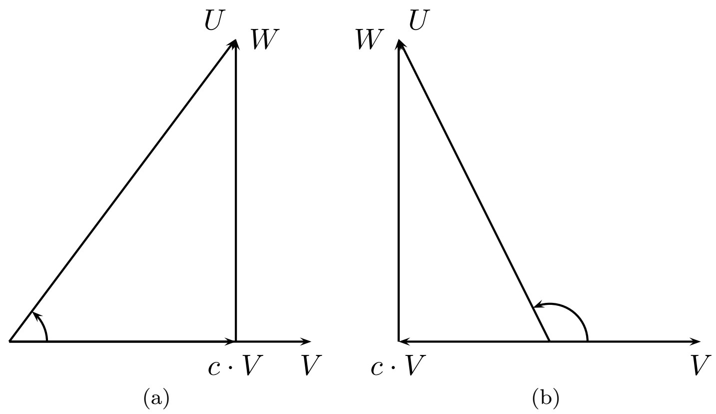
skąd $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ lub $t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Zatem wektorami prostopadłymi do wektora $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i mającymi długość 1 są $\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. ■

Niech $\angle(U, V)$ oznacza kąt między wektorami U i V (kąt między wektorami wodzącymi punktów U i V)

Twierdzenie 1.14. *Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi* $\langle U, V\rangle = \|U\|\,\|V\|\cos\angle(U, V)$.

Dowód. W przypadku, gdy którykolwiek z wektorów jest zerowy, teza jest oczywista, bo $\langle U, V\rangle = 0$.

Załóżmy teraz, że wektory U i V są niezerowe. Niech W będzie wektorem prostopadłym do wektora V takim, że dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ mamy $W + cV = U$ (wektor cV jest *rzutem prostopadłym wektora U na prostą rozpinaną przez wektor V*). W zależności od kąta między wektorami U i V możliwe są dwa przypadki, które przedstawiono na rysunku 5. Gdy kąt między wektorami



Rysunek 5

U i V jest ostry (rys. 5(a)), to

$$\cos\angle(U, V) = \frac{\|cV\|}{\|U\|} = |c|\,\frac{\|V\|}{\|U\|}.$$

Gdy kąt między wektorami U i V jest rozwarty (rys. 5(b)), to

$$\cos\angle(U, V) = \cos\left(\pi - \angle(U, -V)\right) = -\cos\angle(U, -V) = -\,|c|\,\frac{\|V\|}{\|U\|}.$$

Ponadto, gdy kąt między wektorami U i V jest ostry, to $c \geq 0$ (por. rys. 5(a)), więc $\cos\angle(U, V) = c\frac{\|V\|}{\|U\|}$ a gdy kąt między wektorami U i V jest rozwarty, to $c < 0$ (por. rys. 5(b)), więc $\cos\angle(U, V) = -(-c)\frac{\|V\|}{\|U\|} = c\frac{\|V\|}{\|U\|}$. Zatem w obu przypadkach $\cos\angle(U, V) = c\dfrac{\|V\|}{\|U\|}$.

Z drugiej strony wektor $W = U - cV$ jest prostopadły do wektora V, więc z faktu 1.11 mamy

$$0 = \langle U - cV, V\rangle = \langle U, V\rangle - c\,\langle V, V\rangle\,,$$

i stąd możemy wyliczyć stałą c

$$c = \frac{\langle U, V\rangle}{\langle V, V\rangle} = \frac{\langle U, V\rangle}{\|V\|^2}.$$

Zatem

$$\cos\angle(U, V) = \frac{\langle U, V\rangle}{\|V\|^2}\frac{\|V\|}{\|U\|} = \frac{\langle U, V\rangle}{\|V\|\,\|U\|}. \qquad \blacksquare$$

Ponieważ dla dowolnych wektrów U i V zachodzi $|\cos\angle(U, V)| \leq 1$, z udowodnionego przed chwilą twierdzenia 1.14 wynika następujący

Wniosek 1.15 (Nierówność Schwarza)**.** Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi

$$|\langle U, V\rangle| \leq \|U\|\,\|V\|.$$

Wniosek 1.16 (Nierówność trójkąta)**.** Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi

$$\|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|.$$

Dowód. Niech U i V będą dowolnymi wektorami. Wtedy

$$\begin{aligned}\|U + V\|^2 &= \langle U + V, U + V\rangle = \langle U, U\rangle + \langle U, V\rangle + \langle V, U\rangle + \langle V, V\rangle = \\ &= \|U\|^2 + 2\langle U, V\rangle + \|V\|^2 \leq \|U\|^2 + 2\|U\|\,\|V\| + \|V\|^2 = \\ &= (\|U\| + \|V\|)^2. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Nierówność użyta w powyższym dowodzie to nierówność Schwarza.

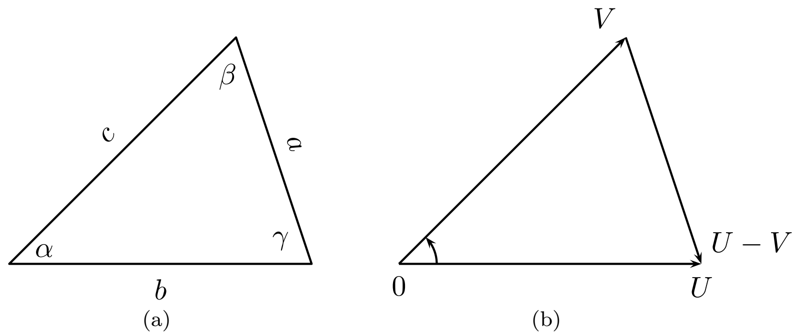
Wniosek 1.17 (Wzór cosinusów, twierdzenie Carnota)**.** W dowolnym trójkącie o bokach a, b, c i przeciwległych kątach równych odpowiednio α, β, γ (rys. 6(a))zachodzi

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.\end{aligned}$$

Istotnie, bez straty ogólności możemy założyć, że jednym z wierzchołków trójkąta jest punkt 0 (rys. 6(b)). Kładąc $\|U\| = b$, $\|V\| = c$ oraz $\|U - V\| = a$ mamy

$$\begin{aligned}a^2 &= \|U - V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 - 2\langle U, V\rangle \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \|U\|^2 + \|V\|^2 - 2\|U\|\,\|V\|\cos\angle(U, V) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\end{aligned}$$

gdzie równość oznaczona symbolem $*$ wynika z twierdzenia 1.14.



Rysunek 6

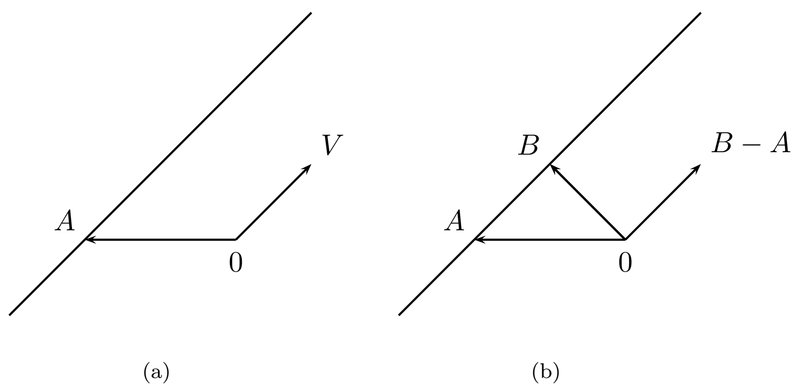
1.3. Proste na płaszczyźnie

Dla dowolnego wektora V na płaszczyźnie istnieje nieskończenie wiele prostych o kierunku V (równoległych do V). Jeśli dodamy, że chcemy prostej o kierunku V przechodzącej przez jakiś wybrany punkt, dajmy na to A, zidentyfikujemy ją w sposób jednoznaczny.

Równanie parametryczne takiej prostej ma postać

$$X = A + tV, \tag{1.6}$$

gdzie $X = \binom{x}{y}$ oznacza kartezjańskie współrzędne , $t \in \mathbb{R}$ jest parametrem położenia punktu na prostej, $A = \binom{a_1}{a_2}$ jest pewnym dowolnie wybranym punktem na prostej, zaś $V = \binom{v_1}{v_2}$ — *niezerowym* wektorem kierunkowym prostej (patrz rys. 7(a)).



Rysunek 7

Zauważmy, iż jest to po prostu skrócony zapis układu równań

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1, \\ y = a_2 + tv_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

W przypadku (patrz rys. 7(b)), gdy wektor kierunkowy nie jest dany *explicite*, a wiadomo, że prosta przechodzi przez punkty A i B, równanie (1.6) przyjmuje postać

$$X = A + t(B - A). \tag{1.8}$$

Przykład 1.18. Rozpatrzmy prostą mającą kierunek wektora $V = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ oraz przechodzącą przez punkt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Zgodnie z (1.6) oraz (1.7), jej równanie parametryczne ma postać

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1+3t \\ 2+4t \end{smallmatrix}\right) \text{ lub równoważnie } \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 4t. \end{cases}$$

Wstawiając $t = \frac{x-1}{3}$ (otrzymane z pierwszego równania w powyższym układzie równań) do drugiego równania w układzie, dostajemy po przekształceniu *równanie ogólne* prostej

$$4x - 3y + 2 = 0. \qquad \blacksquare$$

Równanie ogólne prostej ma postać

$$ax + by + c = 0, \tag{1.9}$$

gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a^2 + b^2 > 0$. Ten warunek oznacza po prostu, że współczynniki a i b nie mogą być jednocześnie równe 0.

Zauważmy, że równanie (1.9) można zapisać z użyciem iloczynu skalarnego

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + c = 0. \tag{1.10}$$

Ponadto, wektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ jest prostopadły do prostej $ax + by + c = 0$. Istotnie, niech X_1 oraz X_2 spełniają równanie $ax + by + c = 0$. Wówczas

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, X_1 \right\rangle + c = 0,$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, X_2 \right\rangle + c = 0.$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, X_1 \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, X_2 \right\rangle = 0,$$

a korzystając z dwuliniowości iloczynu skalarnego mamy

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, X_1 - X_2 \right\rangle = 0.$$

Zatem z faktu 1.11 mamy, że $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \perp X_1 - X_2$ a kierunek wektora $X_1 - X_2$ to kierunek naszej prostej.

Przykład 1.19. Znajdziemy równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i mającej kierunek wektora $U = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Zgodnie z (1.9) mamy

$$ax + by + c = 0, \text{ gdzie } \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \perp \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Spróbujmy zatem przyjąć $a = -3$ oraz $b = 2$. Wówczas szukane równanie przyjmuje postać

$$-3x + 2y + c = 0,$$

Szukana prosta przechodzi przez punkt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, podstawmy więc

$$-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + c = 0, \text{ czyli } c = 3.$$

Stąd szukane równanie ogólne prostej ma postać

$$-3x + 2y + 3 = 0. \qquad \blacksquare$$

Gdybyśmy wzięli inny wektor prostopadły do kierunku prostej, dostalibyśmy trochę inne równanie ogólne wyznaczające tę samą prostą. Różnica między tymi równaniami sprowadzałaby się jednak do przemnożenia przez odpowiednią stałą.

Przykład 1.20. Obliczymy *cosinus* kąta α, pod jakim przecinają się proste $x + y = 1$ oraz $x - 2y = 4$. Wektorami prostopadłymi do powyższych prostych są odpowiednio $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ (lub $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ odpowiednio). Zauważmy przy tym, że kąt pomiędzy tymi wektorami jest równy kątowi, pod jakim przecinają się proste (por. rys. 8). Zatem

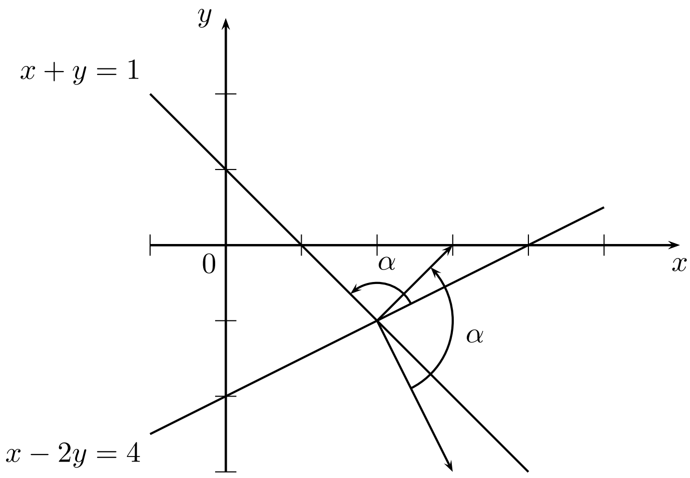
$$\cos\alpha = \cos\angle\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\| \left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Znając $\cos\alpha$ nietrudno obliczyć wartość kąta α

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

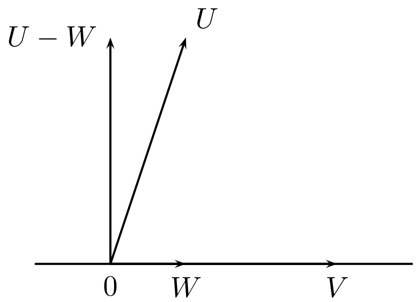
Zauważmy, iż w ten sposób obliczyliśmy kąt rozwarty, pod jakim przecinają się proste. Postępując analogicznie w przypadku pary wektorów $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ (lub $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$) otrzymamy kąt ostry. $\blacksquare$

W dowodzie twierdzenia 1.14 wykorzystaliśmy pojęcie *rzutu prostopadłego* wektora na prostą, które teraz sprecyzujemy.



Rysunek 8

Definicja 1.21. *Rzutem prostopadłym* wektora U na prostą rozpinaną przez wektor V nazywamy taki wektor W, że $U - W \perp V$ (patrz rys. 9). Wektor W oznaczamy przez $P_V(U)$.



Rysunek 9

Z dowodu twierdzenia 1.14 wynika następująca uwaga

Uwaga 1.22. Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi

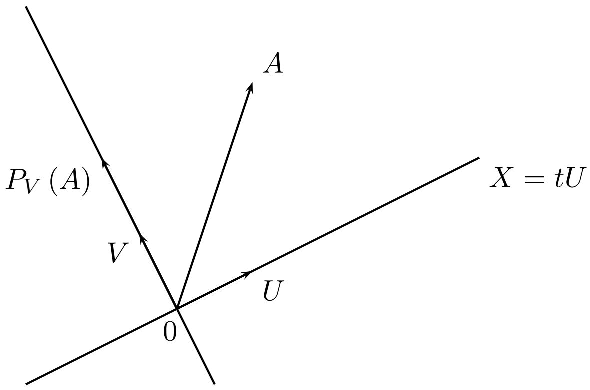
$$P_V(U) = \frac{\langle U, V\rangle}{\langle V, V\rangle} V = \frac{\langle U, V\rangle}{\|V\|^2} V.$$

By zrozumieć powyższy wzór zauważmy, że rzut U na prostą rozpinaną przez V to skalarna krotność wektora V. Wartość skalara, przez który należy pomnożyć V by dostać W wynika z faktu, że trójkąt o wierzchołkach 0, U i W jest prostokątny i z twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 1.23. W następnych dwóch linijkach obliczymy *cosinus* kąta, pod jakim przecinają się wektory $U = \binom{1}{2}$ i $V = \binom{3}{4}$, a następnie znajdziemy rzut prostopadły wektora U na prostą rozpinaną przez wektor V.

$$\cos\angle(U,V) = \tfrac{\langle U,V\rangle}{\|U\|\|V\|} = \tfrac{11}{\sqrt{5}\cdot 5} = \tfrac{11\sqrt{5}}{25},$$
$$P_V\left(U\right) = \tfrac{\langle U,V\rangle}{\|V\|^2}V = \tfrac{11}{25}\binom{3}{4} = \begin{pmatrix} \frac{33}{25} \\ \frac{44}{25} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Przykład 1.24. Znajdziemy odległość punktu $A = \binom{a}{b}$ od prostej $X = tU$, gdzie $U = \binom{c}{d}$. Zauważmy, że przesuwając punkt A równolegle do prostej



Rysunek 10

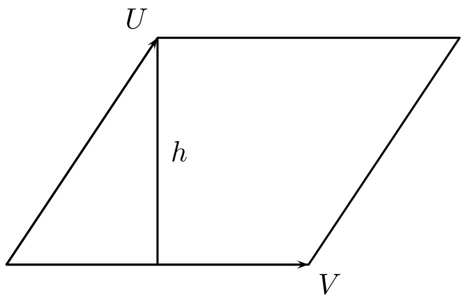
nie zmieniamy odległości między nimi. Weźmy zatem wektor V prostopadły do prostej i przesuńmy A tak by znalazł się na prostej rozpinanej przez V. Wykonaliśmy rzut wektora (punktu) A na prostą rozpinaną przez V. Odległość punktu A od prostej $X = tU$ jest zatem równa długości rzutu prostopadłego punktu A na prostą rozpinaną przez wektor prostopadły do prostej $X = tU$ (por. rys. 10).

Zatem niech $V = \binom{-d}{c}$. Mamy

$$\|P_V\left(A\right)\| = \left\|P_{\binom{-d}{c}}\left(\binom{a}{b}\right)\right\| = \left\|\tfrac{\langle\binom{a}{b},\binom{-d}{c}\rangle}{\|\binom{-d}{c}\|^2}\binom{-d}{c}\right\| = \left\|\tfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}\binom{-d}{c}\right\| =$$
$$= \tfrac{|-ad+bc|}{c^2+d^2}\|\binom{-d}{c}\| = \tfrac{|ad-bc|}{c^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2} = \tfrac{|ad-bc|}{\sqrt{c^2+d^2}}. \qquad \blacksquare$$

1.4. Wyznacznik pary wektorów

Rozważmy *równoległobok* rozpięty przez wektory $U = \binom{u_1}{u_2}$ i $V = \binom{v_1}{v_2}$, tzn. zbiór $\left\{X \in \mathbb{R}^2 : \exists s,t \in [0,1] \quad X = sU + tV\right\}$. Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości podstawy i wysokości h opuszczonej na tę podstawę. Wysokość jest równa odległości punktu U od prostej rozpinanej przez



Rysunek 11

wektor V (por. rys. 11), czyli $h = \left\| P_{\tilde{V}}(U) \right\|$, gdzie $\tilde{V} = \binom{-v_2}{v_1}$ jest wektorem prostopadłym do wektora V. Stąd

$$h \|V\| = \left\| P_{\tilde{V}}(U) \right\| \|V\| = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |u_1 v_2 - u_2 v_1|,$$

czyli pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $U = \binom{u_1}{u_2}$ i $V = \binom{v_1}{v_2}$ jest z dokładnością do znaku równe liczbie $u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Powyższe rozumowanie prowadzi do następującej definicji *wyznacznika* pary wektorów.

Definicja 1.25. *Wyznacznikiem* pary wektorów $U = \binom{u_1}{u_2}$ oraz $V = \binom{v_1}{v_2}$ nazywamy liczbę $u_1 v_2 - u_2 v_1$. Wyznacznik pary wektorów U i V oznaczamy symbolem $\det(U, V) = \det\left(\binom{u_1}{u_2}, \binom{v_1}{v_2}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$.

A zatem pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V wynosi $|\det(U, V)|$.

Stwierdzenie 1.26. *Dla dowolnych wektorów U, V, W oraz liczb rzeczywistych α, β zachodzą następujące własności*

(1) *dwuliniowość wyznacznika*
   (a) $\det(\alpha U + \beta V, W) = \alpha \det(U, W) + \beta \det(V, W)$
   (liniowość względem 1. zmiennej)
   (b) $\det(U, \alpha V + \beta W) = \alpha \det(U, V) + \beta \det(U, W)$
   (liniowość względem 2. zmiennej)

(2) $\det(U, V) = -\det(V, U)$ *(antysymetryczność)*

Zauważmy, że z antysymetryczności wyznacznika wynika, że dla dowolnego wektora U

$$\det(U, U) = 0. \tag{1.11}$$

1.5. Liniowa niezależność

Definicja 1.27. Wektory U i V nazywamy *współliniowymi*, jeśli istnieje liczba rzeczywista α taka, że $U = \alpha V$ lub istnieje liczba rzeczywista β taka, że $V = \beta U$.

Przykład 1.28.

(1) Wektory $\binom{1}{2}$ oraz $\binom{-2}{-4}$ są współliniowe, bo zarówno $\binom{-2}{-4} = -2 \cdot \binom{1}{2}$, jak i $\binom{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \binom{-2}{-4}$.

(2) Wektory $\binom{1}{2}$ oraz $\binom{0}{0}$ są współliniowe, ponieważ $\binom{0}{0} = 0 \cdot \binom{1}{2}$. W tym wypadku nie istnieje liczba rzeczywista α taka, że $\binom{1}{2} = \alpha \binom{0}{0}$.

(3) Wektory $\binom{1}{2}$ oraz $\binom{1}{3}$ nie są współliniowe, bo dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β mamy $\binom{1}{2} \neq \alpha \binom{1}{3}$ i $\binom{1}{3} \neq \beta \binom{1}{2}$.

■

Fakt 1.29. *Dla dowolnych wektorów U i V oraz liczb rzeczywistych λ, μ mamy*

(1) *U i V są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(U, V) = 0$.

(2) *U i V nie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$.*

Dowód. Niech $U = \binom{u_1}{u_2}, V = \binom{v_1}{v_2}$.

(1) Załóżmy najpierw, że $u_2 \neq 0$ oraz $v_2 \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \det(U, V) = 0 &\iff u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0 \iff \\ &\iff u_1 v_2 = u_2 v_1 \iff \frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}, \end{aligned}$$

co oznacza, że wektory U i V są proporcjonalne, czyli istnieje liczba rzeczywista α taka, że $U = \alpha V$ lub istnieje liczba rzeczywista β taka, że $V = \alpha U$, czyli wektory U i V są współliniowe.

Niech teraz $u_2 = 0$ lub $v_2 = 0$. Gdy obie liczby są równe zero, to wyznacznik wynosi zero i oczywiście istnieje liczba rzeczywista α taka, że $u_1 = \alpha v_1$ lub istnieje liczba rzeczywista β taka, że $v_1 = \alpha u_1$, więc wektory U i V są współliniowe.

Gdy natomiast $u_2 = 0$ i $v_2 \neq 0$, to wyznacznik jest równy zero wtedy i tylko wtedy gdy u_1 jest równe 0. Wtedy $U = \binom{0}{0}$ czyli $U = 0 \cdot V$, więc wektory U i V są współliniowe. Analogicznie dowodzi się w przypadku, gdy $u_2 \neq 0$ i $v_2 = 0$.

(2) Dowód obu implikacji przeprowadzimy metodą nie wprost.

($\Longrightarrow$)

Chcemy pokazać, że jeśli U i V nie są współliniowe, to z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$. Przypuśćmy więc nie wprost, że z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ nie wynika, że $\lambda = \mu = 0$. To oznacza, że istnieją liczby rzeczywiste λ, μ takie, że $\lambda U + \mu V = 0$ oraz $\lambda \neq 0$ lub $\mu \neq 0$.

Gdy $\lambda \neq 0$, to $U = \left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right) V$, zaś gdy $\mu \neq 0$, to $U = \left(-\dfrac{\lambda}{\mu}\right) V$. Zatem w obu przypadkach wektory U i V są współliniowe a miały nie być. Doszliśmy zatem do sprzeczności co kończy dowód implikacji.

($\Longleftarrow$)

Teraz chcemy pokazać, że jeśli z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$, to wektory U i V nie są współliniowe. Załóżmy zatem nie wprost, że wektory U i V są współliniowe, czyli istnieje liczba rzeczywista α taka, że $U = \alpha V$ lub istnieje liczba rzeczywista β taka, że $V = \beta U$.

Gdy $U = \alpha V$, to $1 \cdot U + (-\alpha)V = 0$, ale $1 \neq 0$. Jest to sprzeczne z założeniem, że z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$. Analogicznie jest w przypadku, gdy $V = \beta U$. Udowodniliśmy zatem drugą implikację.

■

Przykład 1.30. Pokażemy, że wektory $\binom{1}{2}$ i $\binom{1}{3}$ nie są współliniowe.

Zgodnie z faktem 1.29 wystarczy sprawdzić, czy z warunku $\lambda \binom{1}{2} + \mu \binom{1}{3} = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$.

Mamy

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ 2\lambda + 3\mu = 0. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania dwukrotność pierwszego dostajemy

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ \mu = 0, \end{cases}$$

skąd wynika, że $\lambda = \mu = 0$. ■

Definicja 1.31. Wektory U i V nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych λ, μ z warunku $\lambda U + \mu V = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = 0$. W przeciwnym wypadku wektory U i V nazywamy *liniowo zależnymi*.

Zauważmy, że z faktu 1.29 wynikają w oczywisty sposób równoważne stwierdzenia:

(1) wektory U i V nie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo niezależne,

(2) wektory U i V są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo zależne.

W szczególności, wektory U i V są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(U, V) \neq 0$.

Rozważmy liniowo niezależne wektory $U, V \in \mathbb{R}^2$. Każdy wektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów U i V, tzn. $X = aU + bV$. Pytamy o istnienie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} au_1 + bv_1 = x, \\ au_2 + bv_2 = y, \end{cases}$$

Wiemy, że wektor U nie może być zerowy bo byłby wtedy współliniowy z V. Któraś z jego współrzędnych musi być więc niezerowa. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że $u_2 \neq 0$. Mnożąc drugie równanie przez $\frac{u_1}{u_2}$ i odejmując od pierwszego dostajemy $b(\frac{u_1}{u_2}v_2 - v_1) = \frac{u_1}{u_2}y - x$. Ponieważ U i V nie są współliniowe, mają niezerowy wyznacznik, tzn. $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$ a stąd również $\frac{u_1}{u_2}v_2 - v_1 \neq 0$ więc możemy podzielić otrzymane równanie przez $\frac{u_1}{u_2}v_2 - v_1$. A zatem $b = \frac{\frac{u_1}{u_2}y - x}{\frac{u_1}{u_2}v_2 - v_1}$ i łatwo wyliczymy również a. Zatem równanie ma rozwiązanie.

Zauważmy, że przedstawienie $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów U i V jest jedyne. Istotnie niech

$$\begin{aligned} X &= aU + bV \text{ i jednocześnie} \\ X &= a'U + b'V. \end{aligned}$$

Wówczas

$$0 = (a - a')U + (b - b')V,$$

więc z definicji liniowej niezależności wynika, że $a - a' = 0$ oraz $b - b' = 0$, skąd $a = a'$ i $b = b'$.

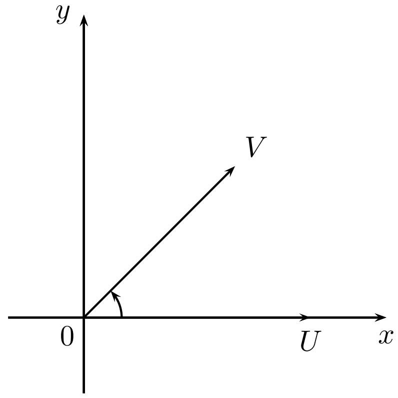
Definicja 1.32. *Bazą* przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy dowolny zbiór $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ taki, że każdy wektor $X \in \mathbb{R}^2$ można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów z $\mathcal{B}$.

Fakt 1.33. *Dla dowolnych liniowo niezależnych wektorów U i V zachodzi*

(1) $\det(U, V) > 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy najkrótszy kąt obrotu od wektora U do wektora V jest skierowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.*

(2) $\det(U,V) < 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy najkrótszy kąt obrotu od wektora U do wektora V jest skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara.*

Dowód. Obróćmy parę wektorów U i V tak, aby wektor U pokrywał się z dodatnią półosią odciętych (por. rys. 12). Wówczas $\det(U,V)$ nie zmienia się (przekonamy się o tym dopiero w rozdziale drugim w przykładzie 2.13) oraz kierunek najkrótszego kąta obrotu zostaje zachowany.



Rysunek 12

Wystarczy zatem udowodnić fakt w przypadku, gdy $U = \binom{u_1}{0}$ i $V = \binom{v_1}{v_2}$, przy czym $u_1 > 0$ oraz $v_2 \neq 0$ (bo wektory U i V są liniowo niezależne). Mamy

$$\det(U,V) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2,$$

skąd przy powyższych założeniach otrzymujemy

$\det(U,V) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_2 > 0$ (rys. 13(a)),

$\det(U,V) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_2 < 0$ (rys. 13(b)). ■

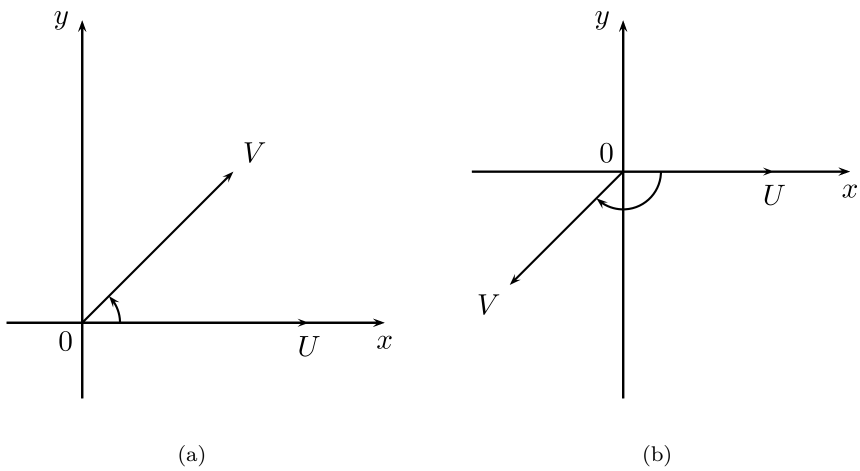
Definicja 1.34. Parę uporządkowaną (U,V) nazywamy *dodatnio* (*ujemnie*) *zorientowaną*, jeśli $\det(U,V) > 0$ ($\det(U,V) < 0$ odpowiednio).

1.6. Układy równań liniowych

W bieżącym podrozdziale ograniczymy się do *układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi*, tzn. układów równań postaci

$$\begin{cases} ax + cy = e, \\ bx + dy = f, \end{cases} \tag{1.12}$$

gdzie x, y są niewiadomymi, zaś a, b, c, d, e, f są współczynnikami rzeczywistymi, przy czym $a^2 + c^2 > 0$ oraz $b^2 + d^2 > 0$.



Rysunek 13

Zauważmy, że każde z równań układu (1.12) jest równaniem ogólnym prostej. Zatem rozwiązaniami układu (1.12) są punkty wspólne dwóch prostych na płaszczyźnie. Gdy proste nie są równoległe (w szczególności, gdy się nie pokrywają), to układ (1.12) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Układ (1.12) można zapisać w postaci

$$x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Zauważmy, że rozwiązaniami układu (1.12) są współczynniki przedstawień wektora $\left(\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Jeśli wektory $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ są liniowo niezależne, to takie przedstawienie jest jedyne, więc układ (1.12) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Powyższe rozważania można zapisać jako następujący fakt

Fakt 1.35. *Jeśli wektory* $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ *i* $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ *są liniowo niezależne, to układ* (1.12) *ma dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. jeśli* $\det\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\right) \neq 0$*, to układ* (1.12) *ma dokładnie jedno rozwiązanie).*

Dowód. Niech wektory $X = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ i $Y = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$ będą liniowo niezależne, czyli niech $\det(X, Y) \neq 0$. Połóżmy $Z = \left(\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix}\right)$. Ponieważ wektory X i Y są liniowo niezależne, więc istnieje dokładnie jedno przedstawienie wektora Z w postaci kombinacji liniowej wektorów X oraz Y. Wówczas $Z = xX + yY$ jedynym rozwiązaniem układu (1.12). Istotnie, gdyby układ (1.12) miał więcej niż jedno rozwiązanie, to zachodziłoby również $Z = x'X + y'Y$. Ale wówczas

$$xX + yY = x'X + y'Y,$$

czyli

$$(x - x')X + (y - y')Y = 0,$$

skąd $x - x' = y - y' = 0$, więc $x = x'$ oraz $y = y'$. ■

Pozostańmy przy oznaczeniach $X = \binom{a}{b}$, $Y = \binom{c}{d}$ oraz $Z = \binom{e}{f}$. Przy założeniu, że $\det(X, Y) \neq 0$, wyliczymy *explicite* wartości współczynników x i y w (1.13), czyli znajdziemy rozwiązanie układu (1.12). Jak wiadomo z faktu 1.35, takie rozwiązanie jest jedyne.

Szukamy zatem $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $xX + yY = Z$. Wówczas

$$\det(xX + yY, Y) = \det(Z, Y).$$

Korzystając z dwuliniowości wyznacznika mamy

$$x \det(X, Y) + y \det(Y, Y) = \det(Z, Y),$$

a ponieważ $\det(Y, Y) = 0$, więc

$$x \det(X, Y) = \det(Z, Y),$$

skąd

$$x = \frac{\det(Z, Y)}{\det(X, Y)}.$$

Podobnie,

$$\det(X, xX + yY) = \det(X, Z),$$

czyli

$$y \det(X, Y) = \det(X, Z),$$

skąd

$$y = \frac{\det(X, Z)}{\det(X, Y)}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzory

$$x = \frac{\det(Z, Y)}{\det(X, Y)}, \qquad y = \frac{\det(X, Z)}{\det(X, Y)}, \tag{1.14}$$

pozwalające rozwiązać układ równań postaci (1.12) za pomocą wyznaczników. Wzory (1.14) nazywamy *wzorami Cramera* choć Chińczycy znali je gdy Cramera nie było jeszcze na świecie.

Uwaga 1.36. Wyznacznik $\det(X, Y)$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu (1.12). Oznaczamy go symbolem W. Wyznaczniki $\det(Z, Y)$ oraz $\det(X, Z)$ oznaczamy odpowiednio przez W_x i W_y.

W przypadku, gdy $W = \det(X, Y) = 0$, to układ (1.12) może mieć nieskończenie wiele rozwiązań bądź nie mieć ich wcale. Wówczas układ (1.12) nazywamy odpowiednio układem *nieoznaczonym* albo *sprzecznym.* Interpretacją graficzną układu nieoznaczonego są dwie pokrywające się proste, zaś układu sprzecznego — dwie proste równoległe, niemające punktów wspólnych.

Rozdział 2

Przekształcenia liniowe $\mathbb{R}^2$ i macierze

2.1. Pojęcia wstępne

Definicja 2.1. *Przekształceniem płaszczyzny* nazywamy dowolną funkcję $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, czyli odwzorowanie $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Definicja 2.2. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest *addytywne*, jeśli

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2 \quad F(X+Y) = F(X) + F(Y).$$

Definicja 2.3. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest *jednorodne*, jeśli

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall X \in \mathbb{R}^2 \quad F(\alpha X) = \alpha F(X).$$

Definicja 2.4. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest *liniowe*, jeśli jest *addytywne* i *jednorodne*, tzn. jeśli

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2 \quad F(\alpha X + \beta Y) = \alpha F(X) + \beta F(Y).$$

Przykładem *nieliniowego* przekształcenia jest translacja o dowolny niezerowy wektor. Istotnie, dla $0 \neq U \in \mathbb{R}^2$ oraz każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i dowolnych $X, Y \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$T_U(\alpha X + \beta Y) = \alpha X + \beta Y + U \neq \alpha X + \beta Y + (\alpha+\beta)U = \alpha T_U(X) + \beta T_U(Y).$$

Co więcej, z rachunku powyżej wynika, że translacja nie jest przekształceniem ani addytywnym, ani jednorodnym.

2.2. Macierz przekształcenia liniowego

Fakt 2.5. *Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wówczas F jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{smallmatrix}\right)$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d. Ponadto liczby te w sposób jednoznaczny wyznaczają F.*

Dowód.
$(\Longrightarrow)$

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie liniowe oraz niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ będzie dowolnym elementem płaszczyzny.

Zauważmy, że $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + y\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Weźmy liczby a, b, c, d dane przez $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) = F(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$. Wówczas

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = F\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xF\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + yF\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

$(\Longleftarrow)$

Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie postaci $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{smallmatrix}\right)$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d. Weźmy dowolne wektory $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ i $X' = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ oraz dowolne liczby rzeczywiste α i β. Wówczas

$$F(\alpha X + \beta X') = F\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} a(\alpha x + \beta x') + b(\alpha y + \beta y') \\ c(\alpha x + \beta x') + d(\alpha y + \beta y') \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha(ax+by) + \beta(ax'+by') \\ \alpha(cx+dy) + \beta(cx'+dy') \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} ax'+by' \\ cx'+dy' \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \beta F\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \alpha F(X) + \beta F(X'). \qquad \blacksquare$$

Definicja 2.6. Jeśli $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{smallmatrix}\right)$, to $\mathrm{m}\,(F) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ nazywamy *macierzą* przekształcenia liniowego F.

Z dowodu faktu 2.5 wynika poniższy

Wniosek 2.7. Kolumnami macierzy przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ są wektory $F(E_1)$ i $F(E_2)$ (odpowiednio pierwszą i drugą).

Uwaga 2.8. Odpowiedniość między przekształceniem liniowym płaszczyzny a macierzami rozmiaru 2×2 jest wzajemnie jednoznaczna, tzn. każdemu przekształceniu liniowemu odpowiada dokładnie jedna macierz i odwrotnie.

Definicja 2.9. *Macierzą kwadratową stopnia* 2 (*macierzą rozmiaru* 2×2) nazywamy uporządkowany zbiór liczb rzeczywistych $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ postaci

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Liczby a_{11}, a_{12}, a_{21} oraz a_{22} nazywamy *wyrazami* lub *elementami* macierzy. Wyrazy a_{11} oraz a_{12} stanowią pierwszy wiersz, zaś wyrazy a_{11} oraz a_{21} — pierwszą kolumnę macierzy, etc. Przestrzeń macierzy kwadratowych stopnia 2 o wyrazach rzeczywistych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Należy podkreślić, iż jest to bardzo szczególny przypadek ogólnej definicji *macierzy prostokątnej*, o czym będzie mowa w dalszej części. Zauważmy przy tym, że wektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ jest *macierzą prostokątną rozmiaru* 2×1.

Definicja 2.10. Elementy macierzy o obu równych indeksach, czyli wyrazy a_{11} oraz a_{22}, tworzą *główną przekątną* (*diagonalę*) macierzy $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$.

Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ oraz $B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Mówimy, że macierze A oraz B są równe, jeśli $a_{ij} = b_{ij}$ dla $i, j = 1, 2$.

Podobnie, jak w przypadku wektorów, na macierzach kwadratowych stopnia 2 definiujemy podstawowe działania.

Dodawanie macierzy A i B określamy następująco

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Mnożenie przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definujemy wzorem

$$tA = t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Nietrudno sprawdzić, że powyższe działania są przemienne i łączne.

W podobny sposób określamy odpowiednie działania na przekształceniach liniowych. I tak, dla $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liniowych oraz $U \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$(F + G)(U) = F(U) + G(U) \tag{2.1$'$}$$

i odpowiednio

$$(tF)(U) = tF(U). \tag{2.2'}$$

Ponieważ odpowiedniość między macierzami 2×2 a przekształceniami liniowymi $\mathbb{R}^2$ jest wzajemnie jednoznaczna, możemy w pewnym sensie utożsamiać te pojęcia. Powyżej zdefiniowaliśmy dodawanie macierzy i dodawanie przekształceń liniowych, mnożenie macierzy przez skalar i mnożenie przekształcenia przez skalar, później zdefiniujemy między innymi pojęcie wyznacznika macierzy i przekształcenia liniowego. Ponieważ pojęcia te znaczą w zasadzie to samo dla macierzy i przekształceń liniowych, nie będziemy ich osobno definiować, mając nadzieję, że czytelnik będzie o tym pamiętał.

Dla dowolnej macierzy $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ oraz wektora $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ określamy *działanie macierzy na wektor* następująco

$$MX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Jest to szczególny przypadek *mnożenia* dwóch macierzy bo o wektorze $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ możemy myśleć jak o macierzy prostokątnej rozmiaru 2×1.

Przykład 2.11. Rozważmy przekształcenie tożsamościowe Id płaszczyzny. Dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^2$ mamy $\mathrm{Id}\,(X) = X$. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas $\mathrm{Id}\,(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+0\cdot y \\ 0\cdot x+y \end{smallmatrix}\right)$, czyli jest to przekształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. ■

Macierz $\mathbb{I} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{m}\,(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nazywamy *macierzą jednostkową* lub *identycznościową*.

Przykład 2.12. Rozważmy symetrię S_l względem prostej l rozpinanej przez wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, tzn. $l = \{t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Wówczas (patrz rys. 1)

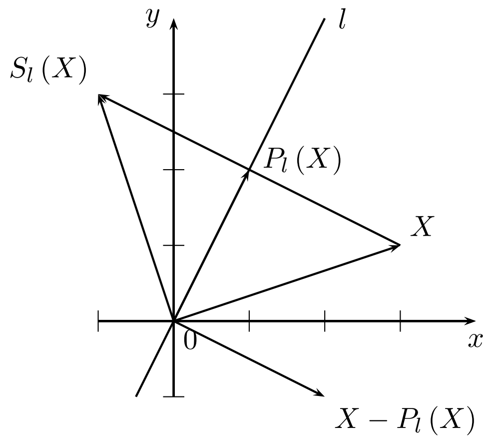
$$S_l\,(X) = P_l\,(X) + (-\,(X - P_l\,(X))) = 2P_l\,(X) - X.$$

Pozostaje zatem obliczyć rzut prostopadły wektora X na prostą l, czyli w tym wypadku na prostą rozpinaną przez wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Mamy

$$P_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}\,(X) = \frac{\langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle}{\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\|^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{x+2y}{5} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y \end{pmatrix},$$

więc

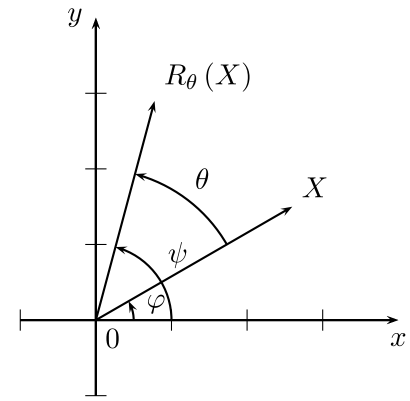
$$S_l\,(X) = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y \end{pmatrix} - \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \end{pmatrix}.$$



Rysunek 1

Łatwo sprawdzić, że przekształcenia P_l oraz S_l są liniowe. Macierzami tych przekształceń są więc $\mathrm{m}(P_l) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ oraz $\mathrm{m}(S_l) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. ■

Przykład 2.13. Rozważmy obrót R_θ o kąt θ wokół punktu 0. Niech $X =$



Rysunek 2

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ oraz $R_\theta(X) = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$. Punkty X i $R_\theta(X)$ wygodniej jest zapisać we współrzędnych biegunowych. Mamy zatem $X = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{smallmatrix}\right)$ oraz $R_\theta(X) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\psi \\ r\sin\psi \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $r = \|X\| = \|R_\theta(X)\|$, z własności obrotu. Zauważmy, że $\psi = \varphi + \theta$ (por. rys. 2), więc

$$R_\theta\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Jest to zatem przekształcenie liniowe o macierzy $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. W dowodzie faktu 1.33 skorzystaliśmy bezprawnie z tego, że obrót nie zmienia wyznacznika pary wektorów. Znając macierz obrotu możemy łatwo sprawdzić, że rzeczywiście tak jest. ■

2.3. Obraz i przeciwobraz przez przekształcenie liniowe

Definicja 2.14. *Obrazem zbioru* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ przez przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór

$$F(\mathcal{A}) = \{F(X) : X \in \mathcal{A}\}.$$

Definicja 2.15. *Przeciwobrazem zbioru* $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ względem przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór

$$F^{-1}(\mathcal{A}) = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Przykład 2.16. Rozważmy prostą $l = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$. Znajdziemy jej obraz i przeciwobraz względem przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, o macierzy $\mathrm{m}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Mamy

$$\begin{aligned} F(l) &= \{F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)) : t \in \mathbb{R}\} = \{F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) + tF(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)) : t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

czyli obrazem prostej l przez F jest prosta $F(l) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$.

Aby znaleźć przeciwobraz prostej l przez F, wygodniej będzie korzystać z równania ogólnego prostej l. Łatwo sprawdzić, że jest ono postaci $2x - y = 2$. Jak wiadomo z definicji, przeciwobrazem prostej l przez F jest zbiór

$$F^{-1}(l) = \Big\{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) \in l\Big\}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(X) = F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+y \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $F(X)$ ma należeć do prostej l, musi spełniać jej równanie:

$$2x' - y' = 2,$$

więc z wcześniejszego rachunku mamy

$$2(x - y) - (3x + y) = 2,$$

czyli

$$-x - 3y = 2 \text{ czyli } x + 3y = -2$$

zatem przeciwobrazem $F^{-1}(l)$ prostej l przez F jest prosta o równaniu ogólnym postaci $x + 3y = -2$. ■

2.4. Złożenie przekształceń

Definicja 2.17. Niech $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Złożeniem* (*superpozycją*) przekształceń F i G nazywamy przekształcenie $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $(F \circ G)(X) = F(G(X))$.

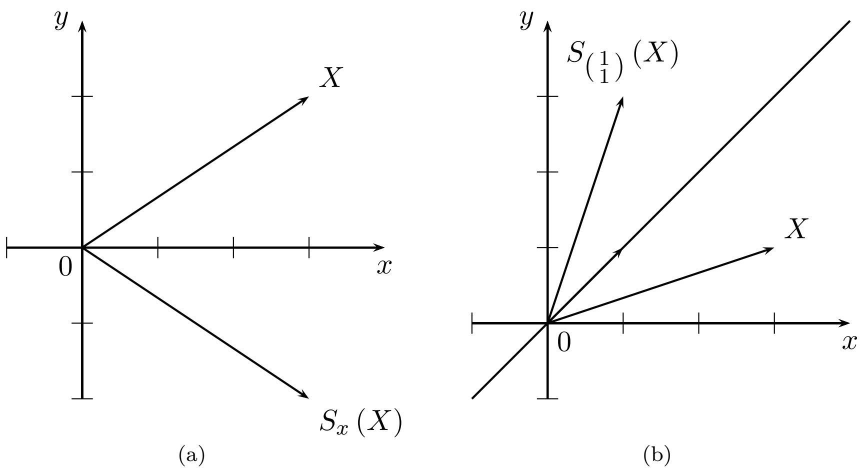
Przykład 2.18. Dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^2$ oraz dla dowolnych wektorów U i V złożeniem translacji T_U oraz T_V jest

$$(T_U \circ T_V)(X) = T_U\left(T_V\left(X\right)\right) = T_U\left(X + V\right) = X + V + U = T_{U+V}\left(X\right),$$

czyli translacja o wektor $U + V$. ■

Jak widać, składanie translacji jest operacją przemienną. Jednak w pełnej ogólności składanie przekształceń nie jest operacją przemienną, czego dowodzi kolejny

Przykład 2.19. Rozważmy symetrię względem osi odciętych S_x oraz symetrię $S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}$ względem prostej rozpinanej przez wektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Dla dowolnego $X = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ mamy $S_x\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}x\\-y\end{smallmatrix}\right)$ oraz $S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}y\\x\end{smallmatrix}\right)$ (por. rys. 3(a) i 3(b) odpowiednio). Wówczas



Rysunek 3

$$\left(S_x \circ S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\right)(X) = S_x\left(S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = S_x\left(\left(\begin{smallmatrix}y\\x\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}y\\-x\end{smallmatrix}\right),$$

$$\left(S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} \circ S_x\right)(X) = S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(S_x\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\-y\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}-y\\x\end{smallmatrix}\right),$$

zatem $S_x \circ S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} \neq S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} \circ S_x$. ■

Jak pokazaliśmy powyżej, składanie przekształceń nie jest operacją przemienną. Jest jednak operacją łączną. Istotnie, dla dowolnych przekształceń $F, G, H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oraz dla każdego $X \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$((F \circ G) \circ H)(X) = (F \circ G)(H(X)) = F(G(H(X))) = F((G \circ H)(X)) = \\ = (F \circ (G \circ H))(X).$$

Fakt 2.20. *Złożenie przekształceń liniowych jest liniowe.*

Dowód. Niech $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będą dowolnymi przekształceniami liniowymi. Wówczas dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $X \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$\begin{aligned}(F \circ G)(\alpha X + \beta Y) &= F(G(\alpha X + \beta Y)) = F(\alpha G(X) + \beta G(Y)) = \\ &= \alpha F(G(X)) + \beta F(G(Y)) = \\ &= \alpha(F \circ G)(X) + \beta(F \circ G)(Y).\end{aligned}$$ ■

Powstaje naturalne pytanie, jak dla danych przekształceń liniowych F i G, znając $\mathrm{m}\,(F)$ oraz $\mathrm{m}\,(G)$, znaleźć $\mathrm{m}\,(F \circ G)$. Zgodnie z wnioskiem 2.7, kolumnami $\mathrm{m}\,(F \circ G)$ są wektory $(F \circ G)(E_1)$ oraz $(F \circ G)(E_2)$. Mamy

$$\begin{aligned}(F \circ G)(E_1) = F(G(E_1)) = \mathrm{m}\,(F)\, G(E_1),\\ (F \circ G)(E_2) = F(G(E_2)) = \mathrm{m}\,(F)\, G(E_2),\end{aligned}$$

gdzie $G(E_1)$ jest pierwszą kolumną $\mathrm{m}\,(G)$, a $G(E_2)$ — drugą. Niech $\mathrm{m}\,(F) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\mathrm{m}\,(G) = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned}(F \circ G)(E_1) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' \\ ca' + dc' \end{pmatrix},\\ (F \circ G)(E_2) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab' + bd' \\ cb' + dd' \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zatem macierz złożenia $\mathrm{m}\,(F \circ G)$ przekształceń liniowych F i G jest postaci

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Co doprowadza nas do wzoru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ cc' + dc' & cd' + dd' \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Wzór (2.5) określa działanie *mnożenia* macierzy kwadratowych stopnia 2. Analogicznie jak w przypadku składania przekształceń, mnożenie macierzy jest łączne, ale nie jest przemienne.

Mnożenie danych macierzy przekształceń liniowych pozwala w prosty sposób znaleźć macierz ich złożenia, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.21. Powróćmy do przykładu 2.19. Ustaliliśmy, że $S_x\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\-y\end{smallmatrix}\right)$ oraz $S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}y\\x\end{smallmatrix}\right)$. Są to przekształcenia liniowe o macierzach $\mathrm{m}\left(S_x\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ oraz $\mathrm{m}\left(S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Zobaczmy co się stanie gdy złożymy je w różnych kolejnościach

$$m\left(S_x\circ S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$$
$$m\left(S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\circ S_x\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$$

Ponadto (zob. przykład 2.13)

$$m\left(S_x\circ S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\right)=\mathrm{m}\left(R_{\frac{3}{2}\pi}\right)=\mathrm{m}\left(R_{-\frac{\pi}{2}}\right),$$
$$m\left(S_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\circ S_x\right)=\mathrm{m}\left(R_{\frac{\pi}{2}}\right).$$ ■

2.5. Odwracalność przekształceń

Definicja 2.22. Przekształcenie $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ nazywamy *odwracalnym*, jeśli dla dowolnego $Y\in\mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jedno $X\in\mathbb{R}^2$ takie, że $F(X)=Y$.

Wówczas $F^{-1}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dane wzorem $F^{-1}(Y)=X$ jest dobrze określonym przekształceniem odwrotnym do F.

Równoważną definicji 2.22 jest następująca

Definicja 2.23. Przekształcenie $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ nazywamy *odwracalnym*, jeśli istnieje $G\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ takie, że $F\circ G=G\circ F=\mathrm{Id}$.

Wówczas takie G nazywamy przekształceniem odwrotnym do F.

Fakt 2.24. *Jeśli przekształcenie $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ jest odwracalne, to istnieje jedyne przekształcenie G odwrotne do F.*

Dowód. Załóżmy, że G_1 oraz G_2 są przekształceniami odwrotnymi do F. Wówczas

$$G_1=G_1\circ\mathrm{Id}=G_1\circ(F\circ G_2)=(G_1\circ F)\circ G_2=\mathrm{Id}\circ G_2=G_2.$$ ■

Fakt 2.25. *Jeśli przekształcenie liniowe $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ jest odwracalne, to przekształcenie odwrotne F^{-1} też jest liniowe.*

Dowód. Dla każdych $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ oraz dowolnych $X,Y\in\mathbb{R}^2$ mamy

$$\begin{aligned}F^{-1}\left(\alpha X+\beta Y\right)&=F^{-1}\left(\alpha F\left(F^{-1}\left(X\right)\right)+\beta F\left(F^{-1}\left(Y\right)\right)\right)\overset{*}{=}\\&\overset{*}{=}F^{-1}\left(F\left(\alpha F^{-1}\left(X\right)+\beta F^{-1}\left(Y\right)\right)\right)=\\&=\alpha F^{-1}\left(X\right)+\beta F^{-1}\left(Y\right),\end{aligned}$$

gdzie równość oznaczona symbolem $*$ wynika z liniowości przekształcenia F. ■

Analogicznie jak w przypadku odwracalności przekształceń (w sensie definicji 2.23), definiujemy odwracalność macierzy.

Definicja 2.26. Macierz A nazywamy *odwracalną* (*nieosobliwą*), jeśli istnieje macierz B taka, że $AB = BA = \mathbb{I}$.

Macierz B nazywamy wtedy *macierzą odwrotną* do A i oznaczamy przez A^{-1}.

Odpowiednikiem faktu 2.24 dla macierzy jest następujący

Fakt 2.27. *Jeśli macierz A jest nieosobliwa, to istnieje jedyna macierz B odwrotna do A.*

Dowód. Załóżmy, że macierze B_1 i B_2 są odwrotne do A. Wówczas

$$B_1 = B_1\mathbb{I} = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = \mathbb{I}B_2 = B_2.$$ ■

Fakt 2.28. *Dla dowolnego przekształcenia odwracalnego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ macierz przekształcenia odwrotnego do F jest równa macierzy odwrotnej przekształcenia F, tzn.* $\mathrm{m}\left(F^{-1}\right) = (\mathrm{m}\,(F))^{-1}$.

Dowód. Mamy

$$\mathrm{m}\,(F)\,\mathrm{m}\left(F^{-1}\right) = \mathrm{m}\left(F \circ F^{-1}\right) = \mathbb{I} = \mathrm{m}\left(F^{-1} \circ F\right) = \mathrm{m}\left(F^{-1}\right)\mathrm{m}\,(F),$$

więc zgodnie z definicją 2.26 $\mathrm{m}\left(F^{-1}\right) = (\mathrm{m}\,(F))^{-1}$. ■

W definicji 2.6 sformułowaliśmy pojęcie macierzy za pomocą przekształcenia liniowego. Aby w pełni pokazać wzajemną odpowiedniość między macierzami a przekształceniami liniowymi (por. z uwagą 2.8), zdefiniujemy teraz przekształcenie liniowe, odpowiadające danej macierzy.

Definicja 2.29. Przekształceniem liniowym odpowiadającym macierzy A nazywamy funkcję $F_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daną wzorem $F_A(X) = AX$.

Przedstawimy teraz pokrótce związek między macierzami a układami równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia 2 oraz $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Dla ustalonych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ połóżmy $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ oraz dla danych $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ niech $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas równaniu macierzowemu

$$AX = Y \tag{2.6}$$

odpowiada układ równań

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1, \\ cx_1 + dx_2 = y_2, \end{cases} \tag{2.7}$$

gdzie x_1, x_2 są niewiadomymi.

Sformułujemy teraz równoważne z definicją 2.26 pojęcie *macierzy odwracalnej*, analogicznie do odwracalności przekształceń (w sensie definicji 2.22).

Definicja 2.30. Macierz A jest *odwracalna*, jeśli dla każdego $Y \in \mathbb{R}^2$ istnieje jedyne $X \in \mathbb{R}^2$ takie, że $AX = Y$ (tzn. dla dowolnego $Y \in \mathbb{R}^2$ układ równań $AX = Y$ ma dokładnie jedno rozwiązanie).

Zauważmy, że dzięki powyższej definicji możemy nie tylko stwierdzić, czy dana macierz jest odwracalna, ale również wprost ją wyliczyć.

Przykład 2.31. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Wyliczymy A^{-1}, o ile istnieje. Połóżmy $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Rozpatrzmy równanie macierzowe

$$AX = Y,$$

czyli układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania dwukrotność pierwszego dostajemy

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1, \\ \qquad\; x_1 = y_2 - 2y_1, \end{cases}$$

skąd $y_1 - 2x_2 = y_2 - 2y_1$, czyli $x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$, więc układ ma jedyne rozwiązanie. Zatem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 + y_2 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ jest macierzą odwrotną do A, czyli po uproszczeniu zapisu

$$X = A^{-1}Y. \qquad \blacksquare$$

2.6. Wyznacznik macierzy

W podrozdziale 1.4 zdefiniowaliśmy pojęcie wyznacznika pary wektorów. Jak wiadomo, kolumny macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ można utożsamić z wektorami $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Nic zatem nie stoi na przeszkodzie, aby zdefiniować pojęcie *wyznacznika macierzy*.

Definicja 2.32. *Wyznacznikiem* macierzy $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ nazywamy liczbę $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Wyznacznik macierzy A oznaczamy symbolem $\det A = \det\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = \left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right|$.

Podobnie określamy wyznacznik przekształcenia liniowego.

Definicja 2.33. Wyznacznikiem przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy liczbę $\det F \overset{\text{df}}{=} \det(\mathrm{m}(F))$.

Z przykładu 2.31 wynika niezwykle użyteczny wniosek:

Fakt 2.34. *Dla dowolnej macierzy kwadratowej A, jeśli* $\det A \neq 0$*, to A jest odwracalna.*

Dowód. Połóżmy $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ oraz $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ i $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Niech $\det A \neq 0$ Wówczas układ

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1, \\ cx_1 + dx_2 = y_2, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo $W = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = \det A \neq 0$. Zatem z definicji 2.30 macierz A jest odwracalna. ■

Istnieje zatem macierz odwrotna do A, którą teraz wyliczymy. Mamy

$$W_{x_1} = \begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix} = dy_1 - by_2,$$

$$W_{x_2} = \begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix} = -cy_1 + ay_2.$$

Korzystając z wzorów (1.14) otrzymujemy

$$x_1 = \frac{W_{x_1}}{W}, \qquad x_2 = \frac{W_{x_2}}{W},$$

skąd

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1 - by_2}{W} \\ \dfrac{-cy_1 + ay_2}{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{W} & \dfrac{-b}{W} \\ \dfrac{-c}{W} & \dfrac{a}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\begin{pmatrix} \frac{d}{W} & \frac{-b}{W} \\ \frac{-c}{W} & \frac{a}{W} \end{pmatrix}$ jest macierzą odwrotną do A. Po uproszczeniu zapisu mamy

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} Y.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

pozwalający wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Fakt 2.35. *Dla dowolnych macierzy kwadratowych tego samego stopnia A i B mamy*

$$\det AB = \det A \det B = \det BA.$$

Dowód powyższego faktu jest prostym rachunkiem, który pozostawiamy jako ćwiczenie.

Z faktów 2.34 oraz 2.35 wynika następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.36. *Dowolna macierz kwadratowa A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$.

Dowód. Dowód jednej implikacji został już przeprowadzony (patrz fakt 2.34). Wystarczy zatem udowodnić implikację odwrotną ($\Longrightarrow$).

Niech A będzie macierzą odwracalną. Zatem zgodnie z definicją 2.26 istnieje macierz B taka, że

$$AB = BA = \mathbb{I},$$

skąd oraz z faktu 2.35 otrzymujemy

$$\det A \det B = \det AB = \det BA = \det \mathbb{I} = 1.$$

Wynika stąd w szczególności, że $\det A \neq 0$. ■

Moduł wyznacznika macierzy ma następującą interpretację geometryczną: dla danego przekształcenia liniowego $F_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, odpowiadającego macierzy A, danego wzorem $F_A(X) = AX$, $|\det A|$ jest *skalą*, z jaką przekształcenie liniowe F_A zmienia pola figur geometrycznych na płaszczyźnie, tzn. dla dowolnej figury $\mathcal{U}$ o polu $|\mathcal{U}|$ zachodzi równość

$$|F_A(\mathcal{U})| = |\det A|\, |\mathcal{U}|\,. \tag{2.9}$$

Istotnie, rozważmy kwadrat jednostkowy $\mathcal{I}$ o wierzchołkach w punktach $\binom{0}{0}$,$\binom{1}{0}$,$\binom{0}{1}$ oraz $\binom{1}{1}$, czyli równoległobok rozpięty przez wektory E_1 i E_2. Jego obrazem przez przekształcenie F_A jest oczywiście równoległobok $F_A(\mathcal{I})$ rozpięty przez wektory $F_A(E_1)$ oraz $F_A(E_2)$. Jak wiadomo pole równoległoboku rozpiętego przez dwa wektory jest równe wyznacznikowi tych wektorów, zatem

$$|F_A(\mathcal{I})| = |\det (F_A(E_1), F_A(E_2))| = |\det F_A| = |\det A|\,.$$

Podobnie jest w przypadku kwadratu o długości boku różnej niż 1 a także w przypadku kwadratu leżącego w innym miejscu płaszczyzny, czyli przesuniętego o dowolny wektor. Dowód tego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie. Aby obliczyć pole dowolnej ograniczonej figury geometrycznej $\mathcal{U}$ pokryjmy najpierw płaszczyznę siatką G_0 kwadratów jednostkowych $\mathcal{I}_0$ o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Zauważmy, że biorąc kwadraty $\mathcal{I}_n$ o bokach długości $\frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) dostajemy ciąg siatek $G_0, G_1, \ldots$ taki, że każdy kwadrat $\mathcal{I}_n$ siatki G_n zawiera 4 kwadraty $\mathcal{I}_{n+1}$

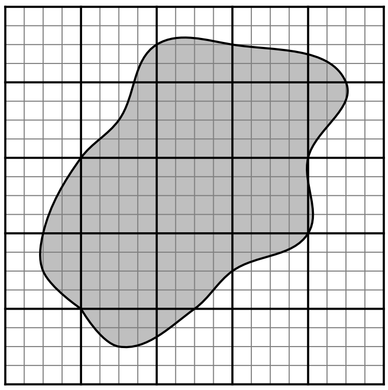
siatki G_{n+1}, czyli $|\mathcal{I}_n| = 4\,|\mathcal{I}_{n+1}|$ (por. rys. 4). Następnie dla ustalonego n oznaczmy przez $\mathcal{X}_n$ zbiór kwadratów $\mathcal{I}_n$ zawartych w $\mathcal{U}$, zaś przez $\mathcal{Y}_n$ — zbiór kwadratów $\mathcal{I}_n$, mających niepusty przekrój z $\mathcal{U}$, tzn.

$$\mathcal{X}_n = \left\{\mathcal{I}_n \subset \mathbb{R}^2 : \mathcal{I}_n \subseteq \mathcal{U}\right\}$$

oraz

$$\mathcal{Y}_n = \left\{\mathcal{I}_n \subset \mathbb{R}^2 : \mathcal{I}_n \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\right\}.$$

Zauważmy przy tym, że dla ustalonego n moc zbioru $\mathcal{X}_n$ jest nie większa niż moc zbioru $\mathcal{Y}_n$, tzn. $\operatorname{card}\mathcal{X}_n \leq \operatorname{card}\mathcal{Y}_n$. Dla ustalonego n oznaczmy przez s_n sumę pól



Rysunek 4

kwadratów $\mathcal{I}_n$ zawartych w $\mathcal{U}$, a przez S_n — sumę pól kwadratów $\mathcal{I}_n$, mających niepusty przekrój z $\mathcal{U}$. Wówczas

$$s_n = \sum_{\mathcal{I}_n \in \mathcal{X}_n} |\mathcal{I}_n| = |\mathcal{I}_n| \operatorname{card}\mathcal{X}_n$$

oraz

$$S_n = \sum_{\mathcal{I}_n \in \mathcal{Y}_n} |\mathcal{I}_n| = |\mathcal{I}_n| \operatorname{card}\mathcal{Y}_n.$$

Ponadto

$$s_n \leq |\mathcal{U}| \leq S_n.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób dwa ciągi. Nietrudno zauważyć, że ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemalejący i ograniczony z góry przez $|\mathcal{U}|$, zaś ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — nierosnący i ograniczony z dołu przez $|\mathcal{U}|$. Zatem ze znanego z analizy matematycznej twierdzenia[1] ciągi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do skończonych granic s oraz S odpowiednio. Jeśli $s < S$, to nie jesteśmy w stanie obliczyć $|\mathcal{U}|$. Jeżeli zaś $s = S$, to oczywiście $s = S = |\mathcal{U}|$.

[1]Każdy niemalejący/nierosnący ciąg ograniczony z góry/dołu jest zbieżny do skończonej granicy.

Dla dowolnej figury $\mathcal{U}$ o danym polu $|\mathcal{U}|$, aby obliczyć $|F_A(\mathcal{U})|$ wystarczy w powyższym rozumowaniu za $\mathcal{I}_n$ wziąć $F_A(\mathcal{I}_n)$. Wówczas, na mocy udowodnionej wcześniej części, mamy

$$|F_A(\mathcal{U})| = |\det A|\,|\mathcal{U}|\,.$$

Przykład 2.37. Rozważmy pole obszaru $\mathcal{U}$ ograniczonego elipsą (czyli krzywą zamkniętą o równaniu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, gdzie $a, b > 0$), tj. zbiór punktów $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$.

Zauważmy najpierw, że elipsa powstaje z okręgu o środku w 0 i promieniu 1 (czyli okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$) przez przekształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Istotnie, niech punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ należy do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$. Znajdziemy obraz punktu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ przez przzkształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Mamy

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax \\ by \end{smallmatrix}\right),$$

skąd $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{x'}{a} \\ \frac{y'}{b} \end{pmatrix}$. Skoro $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ należy do okręgu, to $x^2 + y^2 = 1$, czyli $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$. Zatem punkt $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ spełnia równanie elipsy.

Jak wiadomo, pole koła o środku w 0 i promieniu 1 wynosi π. Stąd

$$|\mathcal{U}| = \left|\det\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\right|\pi = ab\pi. \qquad \blacksquare$$

Definicja 2.38. Mówimy, że przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zachowuje orientację*, jeśli dla dowolnej dodatnio (ujemnie) zorientowanej pary wektorów U i V para wektorów $F(U)$ oraz $F(V)$ jest dodatnio (odpowiednio: ujemnie) zorientowana.

Definicja 2.39. Mówimy, że przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zmienia orientację*, jeśli dla dowolnej dodatnio (ujemnie) zorientowanej pary wektorów U i V para wektorów $F(U)$ oraz $F(V)$ jest ujemnie (odpowiednio: dodatnio) zorientowana.

Fakt 2.40. *Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas F zachowuje (zmienia) orientację wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det F > 0$ *(*$\det F < 0$ *odpowiednio).*

Dowód. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym przekształceniem liniowym oraz niech $U, V \in \mathbb{R}^2$ będą dowolnymi liniowo niezależnymi wektorami.

Zauważmy, że wyznacznik pary wektorów $F(U)$ i $F(V)$ jest równy wyznacznikowi macierzy, której kolumnami, pierwszą i drugą, są odpowiednio wektory $F(U)$ oraz $F(V)$, czyli macierzy $\left(\begin{smallmatrix} F(U) & F(V) \end{smallmatrix}\right)$. Mamy dalej

$$\begin{pmatrix} F(U) & F(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{m}\,(F)\,U & \mathrm{m}\,(F)\,V \end{pmatrix} = \mathrm{m}\,(F)\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix},$$

gdzie $\left(\begin{smallmatrix} U & V \end{smallmatrix}\right)$ jest macierzą, której pierwszą i drugą kolumną są odpowiednio wektory U oraz V. Zatem

$$\begin{aligned}\det\left(F(U), F(V)\right) &= \det\left(\mathrm{m}\left(F\right)\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}\right) = \det\left(\mathrm{m}\left(F\right)\right)\det\begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} = \\ &= \det F \det\left(U, V\right),\end{aligned}$$

skąd wprost wynika teza. ■

Przykład 2.41. Rozważmy obrót R_θ o kąt $\theta \in \mathbb{R}$ wokół punktu 0. Przypomnijmy, że (zob. przykład 2.13), $\mathrm{m}\left(R_\theta\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Mamy

$$\det\left(\mathrm{m}\left(R_\theta\right)\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

czyli R_θ zachowuje orientację dla każdego $\theta \in \mathbb{R}$. ■

Rozdział 3

Izometrie płaszczyzny

3.1. Izometrie

Definicja 3.1. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy *izometrią*, jeśli dla każdych $X, Y \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $\|F(X) - F(Y)\| = \|X - Y\|$.

Przykładami izometrii płaszczyzny są w szczególności *przekształcenie tożsamościowe*, *obrót*, *symetria* (*osiowa* i *środkowa*) oraz *translacja.*

Fakt 3.2. *Złożenie dwóch izometrii jest izometrią, tzn. dla dowolnych izometrii* $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, przekształcenie* $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *też jest izometrią.*

Dowód. Niech $F, G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będą dowolnymi izometriami. Wówczas dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$\begin{aligned}\|(F \circ G)(X) - (F \circ G)(Y)\| &= \|F(G(X)) - F(G(Y))\| = \\ &= \|G(X) - G(Y)\| = \|X - Y\|. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Fakt 3.3. *Jeśli przekształcenie* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *jest izometrią, to* F *jest złożeniem pewnej izometrii* $F'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, zachowującej* 0 *(tzn.* $F'(0) = 0$*), oraz translacji.*

Dowód. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dowolną izometrią. Położżmy $U = F(0)$ oraz $F' = T_{-U} \circ F$. Wówczas

$$F'(0) = (T_{-U} \circ F)(0) = T_{-U}(F(0)) = T_{-U}(U) = U - U = 0.$$

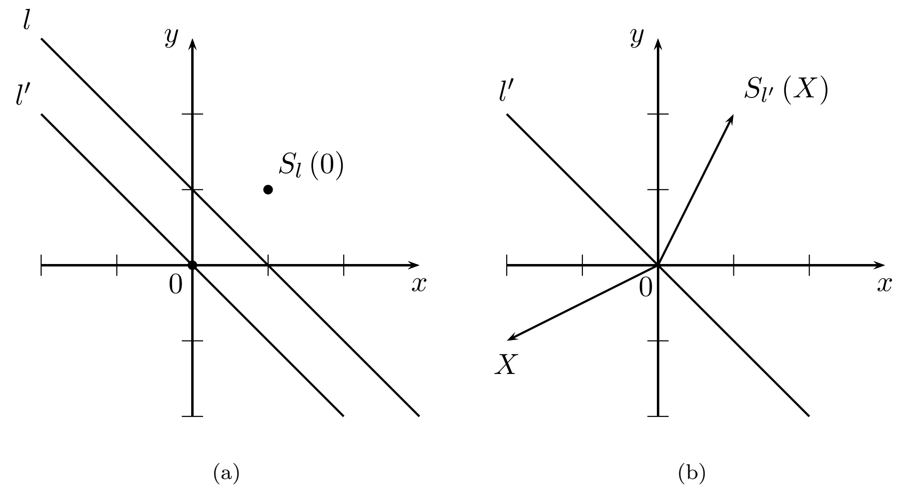
oraz

$$T_U \circ F' = T_U \circ (T_{-U} \circ F) = (T_U \circ T_{-U}) \circ F = \mathrm{Id} \circ F = F. \qquad \blacksquare$$

Przykład 3.4. Rozważmy symetrię osiową S_l względem prostej l o równaniu ogólnym $x + y = 1$. Oczywiście $S_l\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Wówczas $S_l = T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} \circ F'$, gdzie $F'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest pewną izometrią zachowującą 0, tzn. $F'(0) = 0$. Ponadto, $F' = T_{\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)} \circ S_l$. Jak nietrudno zauważyć (por. rys. 1(a)), F' jest symetrią osiową względem prostej l' o równaniu ogólnym $x + y = 0$, czyli $F' = S_{l'}$. Oczywiście (por. rys. 1(b)) dla dowolnego $X = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ mamy $S_{l'}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}-y\\-x\end{smallmatrix}\right)$, więc w szczególności $S_{l'}$ jest przekształceniem liniowym. Ponadto

$$F'(0) = S_{l'}\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right) = 0.$$

Symetrię osiową S_l możemy teraz zapisać jawnym wzorem



Rysunek 1

$$S_l\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} \circ F'\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(S_{l'}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\right) = T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\left(\left(\begin{smallmatrix}-y\\-x\end{smallmatrix}\right)\right) =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}-y\\-x\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-y+1\\-x+1\end{smallmatrix}\right). \qquad \blacksquare$$

Lemat 3.5. *Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem zachowującym 0. Wówczas F jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy F zachowuje iloczyn skalarny (tzn. dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość $\langle F(X), F(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$).*

Dowód. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym przekształceniem zachowującym 0 oraz niech $X, Y \in \mathbb{R}^2$ będą dowolne.

($\Longrightarrow$)

Załóżmy, że F jest izometrią. Wówczas korzystając ze wzoru polaryzacyjnego i równości równoległoboku (z twierdzeń 1.9 oraz 1.8) mamy:

$$\begin{aligned}
\langle F(X), F(Y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|F(X)+F(Y)\|^2 - \|F(X)-F(Y)\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|F(X)+F(Y)\|^2 + \|F(X)-F(Y)\|^2 - 2\,\|F(X)-F(Y)\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(2\left(\|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2\right) - 2\,\|F(X)-F(Y)\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2 - \|F(X)-F(Y)\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2 - \|X-Y\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2\right) - \|X-Y\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2\right) = \langle X, Y\rangle\,,
\end{aligned}$$

czyli F zachowuje iloczyn skalarny.

($\Longleftarrow$)

Załóżmy, że F zachowuje iloczyn skalarny. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|F(X)-F(Y)\|^2 &= \langle F(X)-F(Y), F(X)-F(Y)\rangle = \\
&= \langle F(X), F(X)\rangle - \langle F(X), F(Y)\rangle - \\
&\quad - \langle F(Y), F(X)\rangle + \langle F(Y), F(Y)\rangle = \\
&= \langle X, X\rangle - \langle X, Y\rangle - \langle Y, X\rangle + \langle Y, Y\rangle = \|X-Y\|^2\,,
\end{aligned}$$

więc F jest izometrią. ■

Z lematu 3.5 wynika w szczególności, że obrót wokół punktu 0 o dowolny kąt θ oraz symetria osiowa względem każdej prostej przechodzącej przez punkt 0 zachowują iloczyn skalarny.

3.2. Klasyfikacja izometrii

Twierdzenie 3.6. *Każda izometria płaszczyzny zachowująca* 0 *jest przekształceniem liniowym.*

Dowód. Niech $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie izometrią zachowującą 0. Zauważmy, że dowolny okrąg o środku w zerze przechodzi przez F sam na siebie. Wynika stąd w szczególności, że F jest "na" bo biorąc wszystkie możliwe okręgi wypełnimy całą płaszczyznę (z wyjątkiem zera ale wiemy, że zero jest w zbiorze wartości F). Najpierw pokażemy, że F jest addytywne. Ponieważ F jest "na", dowolny punkt płaszczyzny możemy zapisać jako $F(Z)$ dla pewnego Z.

$$\begin{aligned}\langle F(X+Y), F(Z)\rangle &= \langle X+Y, Z\rangle = \\ &= \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle = \\ &= \langle F(X), F(Z)\rangle + \langle F(Y), F(Z)\rangle = \\ &= \langle F(X)+F(Y), F(Z)\rangle\end{aligned}$$

Powyższa równość jest prawdziwa dla dowolnego punktu płaszczyzny $F(Z)$, w szczególności dla wektorów bazowych E_1 i E_2. Oznacza to, że współrzędne punktów $F(X+Y)$ i $F(X)+F(Y)$ są równe a zatem $F(X+Y) = F(X)+F(Y)$. Podobnie można pokazać jednorodność F:

$$\begin{aligned}\langle F(\alpha X), F(Z)\rangle &= \langle \alpha X, Z\rangle = \\ &= \alpha\,\langle X, Z\rangle = \\ &= \alpha\,\langle F(X), F(Z)\rangle = \\ &= \langle \alpha F(X), F(Z)\rangle\end{aligned}$$

skąd wnioskujemy, że $F(\alpha X) = \alpha F(X)$

■

Kolejne twierdzenie to klasyfikacja izometrii liniowych.

Twierdzenie 3.7. *Każda izometria liniowa jest obrotem wokół zera lub symetrią osiową względem prostej przechodzącej przez* 0.

Dowód. F jest izometrią więc $F(E_1)$ i $F(E_2)$ mają długość 1. Niech θ oznacza kąt o jaki należy obrócić E_1 żeby otrzymać $F(E_1)$. F zachowuje iloczyn skalarny a więc $F(E_1)$ i $F(E_2)$ są prostopadłe. Są tylko dwa wektory prostopadłe do $F(E_1)$, jeden z nich to wektor E_2 obrócony o kąt θ a drugi to minus pierwszy czyli E_2 obrócony o kąt $\theta+\pi$. Kąt między E_2 a $F(E_2)$ wynosi zatem $\theta+\pi$ a jeśli spojrzymy z drugiej strony, $\pi-\theta$. W pierwszym przypadku F jest po prostu obrotem o θ. Przekonajmy się, że w drugim przypadku F to symetria względem prostej przechodzącej przez zero, której wektorem kierunkowym jest E_1 obrócony o $\frac{\theta}{2}$. Prostą tę oznaczmy literą l. Jest jasne, że $F(E_1)$ to odbicie E_1 względem l. Może budzić wątpliwości czy podobnie jest dla E_2 i $F(E_2)$. Kąt między prostą l a E_2 wynosi $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ (może być ujemny!). A zatem kąt między E_2 a jego odbiciem względem l jest dwa razy większy i wynosi $\pi-\theta$. Zatem odbicie E_2 względem l to $F(E_2)$.

■

Fakt 3.8. *Każda symetria osiowa względem prostej przechodzącej przez punkt* 0 *jest złożeniem symetrii względem osi odciętych oraz obrotu wokół punktu* 0.

Dowód. Oczywiście jeśli l jest prostą $\{tE_1 : t \in \mathbb{R}\}$, to $S_l = S_x = R_0 \circ S_x$

Niech l będzie dowolną inną prostą. Weźmy θ takie, że $l = \left\{R_{\frac{\theta}{2}}(tE_1) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Zauważmy (por. rys. 2(a)), że wtedy dla każdego $X \in l$ mamy

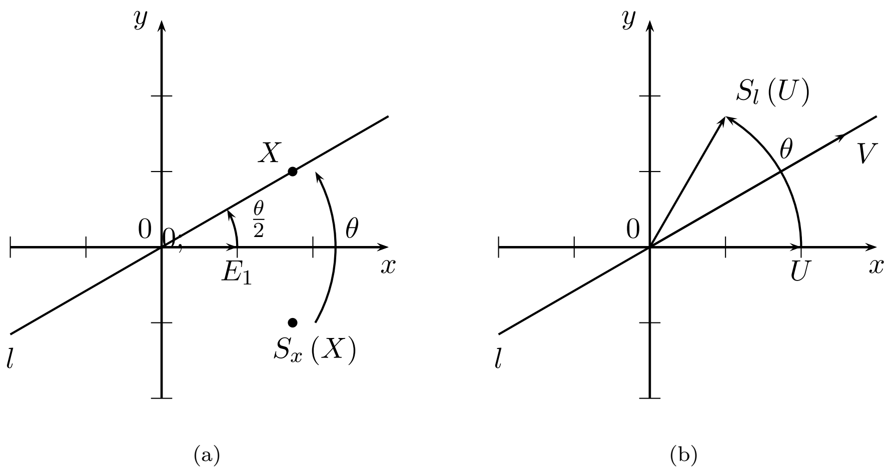
$$(R_\theta \circ S_x)(X) = X.$$

czyli przekształcenie $R_\theta \circ S_x$ jest izometrią zachowującą prostą l. Upewnijmy się czy na pewno $S_l = R_\theta \circ S_x$.

Weźmy jakieś liniowo niezależne $U, V \in \mathbb{R}^2$, np. niech $U \in \{tE_1 : t \in \mathbb{R}\}$ oraz $V \in \left\{R_{\frac{\theta}{2}}(tE_1) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Wówczas (por. rys. 2(b))

$$\begin{aligned} S_l(U) &= R_\theta(U) = R_\theta(S_x(U)) = (R_\theta \circ S_x)(U), \\ S_l(V) &= V = (R_\theta \circ S_x)(V), \end{aligned}$$

Ponieważ sprawdziliśmy równość na dwóch liniowo niezależnych wektorach, możemy wnioskować, że $S_l = R_\theta \circ S_x$ ■



Rysunek 2

Wniosek 3.9. Każda izometria zachowująca zero jest obrotem lub złożeniem symetrii S_x z obrotem.

Przypomnijmy (zob. przykład 2.13), że macierz obrotu ma postać $\mathrm{m}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ a macierz symetrii S_x (zob. przykład 2.21) $\mathrm{m}(S_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Przy dowodzie kolejnego faktu potrzebna nam będzie macierz symetrii względem prostej przechodzącej przez 0 i przecinającej oś odciętych pod kątem

$\frac{\theta}{2}$.

$$\mathrm{m}\left(S_l\right)=\mathrm{m}\left(R_\theta\circ S_x\right)=\mathrm{m}\left(R_\theta\right)\mathrm{m}\left(S_x\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Z twierdzenia 2.48 wiemy, że każda izometria liniowa to albo obrót albo symetria. Udowodnimy teraz fakt pozwalający szybko ustalić z jaką izometrią mamy do czynienia.

Fakt 3.10. *Niech przekształcenie liniowe $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ będzie izometrią. Wówczas F jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det F>0$. *Jeśli* $\det F<0$ *to F jest symetrią.*

Dowód. Niech przekształcenie liniowe $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ będzie izometrią. Jak wiadomo F jest postaci R_θ lub $R_\theta\circ S_x$. Zgodnie z faktem 3.8 zachodzi równość $S_l=R_\theta\circ S_x$. Ponadto mamy

$$\mathrm{m}\left(R_\theta\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{m}\left(S_l\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix},$$

skąd

$$\det R_\theta=1,$$
$$\det S_l=-1.$$ ∎

Z faktu 3.10 wynika, że jeśli przekształcenie liniowe $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ jest izometrią, to $|\det F|=1$. Zauważmy przy tym, iż implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Definicja 3.11. *Macierzą transponowaną* (*przestawioną*) nazywamy macierz A^{T}, powstałą z danej macierzy A poprzez zastąpienie wierszy kolumnami, a kolumn wierszami, tzn. jeśli $A=\left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$, to $A^{\mathsf{T}}=\left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$.

Fakt 3.12. *Niech $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\ni A=\left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) *A jest macierzą izometrii liniowej.*

(2) *Kolumny A są prostopadłe i mają długość 1, tzn. $\left\langle\left(\begin{smallmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{smallmatrix}\right)\right\rangle=0$ oraz $\left\|\left(\begin{smallmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{smallmatrix}\right)\right\|=\left\|\left(\begin{smallmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{smallmatrix}\right)\right\|=1$.*

(3) *$A^{\mathsf{T}}A=\mathbb{I}$.*

(4) *Wiersze A są prostopadłe i mają długość 1, tzn.* $\langle \left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a_{22} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right) \rangle = 0$ *oraz* $\|\left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix} a_{22} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right)\| = 1$.

(5) $AA^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}$.

(6) $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ *lub* $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ *dla pewnego* $\theta \in \mathbb{R}$.

Dowód.
(1) $\Longrightarrow$ (2)

Załóżmy, że A jest macierzą izometrii liniowej $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Oczywiście kolumnami A, pierwszą i drugą, są odpowiednio wektory $F(E_1)$ oraz $F(E_2)$, tzn. $A = \left(\begin{smallmatrix} F(E_1) & F(E_2) \end{smallmatrix}\right)$. Ponadto

$$\|F(E_1)\| = \|E_1\| = 1 \text{ oraz } \|F(E_2)\| = \|E_2\| = 1.$$

Na mocy lematu 3.5 zachodzi natomiast równość

$$\langle F(E_1), F(E_2)\rangle = \langle E_1, E_2\rangle = 0.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Załóżmy, że kolumny A są prostopadłe i mają długość 1, więc $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ oraz $a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$. Wówczas

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (5)

Załóżmy, że $A^{\mathsf{T}}A = \mathbb{I}$. Wynika (na mocy faktu 2.35 oraz twierdzenia 2.36) stąd w szczególności, że macierze A^{T} oraz A są nieosobliwe. Istnieje zatem macierz A^{-1}. Wtedy $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$, skąd

$$AA^{\mathsf{T}} = AA^{-1} = \mathbb{I}.$$

(5) $\Longrightarrow$ (4)

Załóżmy, że $AA^{\mathsf{T}} = \mathbb{I}$. Wówczas

$$AA^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skąd

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \text{ tzn. } \langle \left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right) \rangle = 0;$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \text{ więc } \|\left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{smallmatrix}\right)\| = 1;$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \text{ więc } \|\left(\begin{smallmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right)\| = 1.$$

(4) $\Longrightarrow$ (6)

Załóżmy, że wiersze A są prostopadłe i mają długość 1, więc $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} = 0$ oraz $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$. Wówczas istnieje $\theta \in \mathbb{R}$ taka, że $a_{11} = \cos\theta$ oraz $a_{12} = \sin\theta$. Z równości $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ mamy natomiast

$$a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta = 0,$$

skąd

$$a_{21} = C\sin\theta \text{ oraz } a_{22} = -C\cos\theta$$

lub

$$a_{21} = -C\sin\theta \text{ i } a_{22} = C\cos\theta,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$. Ale ponieważ wiersze mają mieć długość 1 więc $C = 1$, zatem odpowiednio

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

lub

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

(6) $\Longrightarrow$ (1)

Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ lub $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$. Wówczas odpowiednio $A = \mathrm{m}(R_\theta)$ lub $A = \mathrm{m}(R_\theta \circ S_x) = \mathrm{m}(S_l)$, gdzie l jest prostą przecinającą oś odciętych w punkcie 0 pod kątem $\frac{\theta}{2}$. Zatem w obu przypadkach A jest macierzą izometrii liniowej. ■

Z faktu 3.12 wynika następujący, bardzo przydatny wniosek

Wniosek 3.13. Jeśli $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest macierzą izometrii, to A jest odwracalna oraz $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

Rozdział 4

Diagonalizacja

4.1. Wektory i wartości własne

Definicja 4.1. Niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^2$ nazywamy *wektorem własnym* macierzy A (przekształcenia liniowego F) , jeśli istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $AU = \lambda U$ ($F(U) = \lambda U$ odpowiednio).

Definicja 4.2. Jeśli dla $\lambda \in \mathbb{R}$ istnieje niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^2$ taki, że $AU = \lambda U$ ($F(U) = \lambda U$), to λ nazywamy wartością własną macierzy A (odpowiednio: przekształcenia liniowego F).

Fakt 4.3. *Jeśli $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, są wartościami własnymi macierzy A, zaś $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ — odpowiadającymi im wektorami własnymi, to U_1 i U_2 są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, będą wartościami własnymi macierzy A, zaś $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ — odpowiadającymi im wektorami własnymi. Przypuśćmy, że U_1 i U_2 są liniowo zależne, tzn. istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $U_1 = \alpha U_2$ lub istnieje $\beta \in \mathbb{R}$ taka, że $U_2 = \beta U_1$. Załóżmy zatem, że np. $U_1 = \alpha U_2$. Wówczas

$$\lambda_1 U_1 = AU_1 = A(\alpha U_2) = \alpha A U_2 = \alpha \lambda_2 U_2 = \lambda_2(\alpha U_2) = \lambda_2 U_1,$$

skąd $(\lambda_1 - \lambda_2)U_1 = 0$, więc $\lambda_1 = \lambda_2$, co jest niemożliwe, bo założyliśmy, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Definicja 4.4. *Śladem* macierzy kwadratowej A nazywamy sumę wyrazów na głównej przekątnej. Ślad macierzy A oznaczamy symbolem $\operatorname{tr} A$.

Fakt 4.5. *Dla dowolnych macierzy kwadratowych tego samego stopnia A i B mamy*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA.$$

Dowód powyższego faktu jest prostym rachunkiem, który pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 4.6. *Wielomianem charakterystycznym* macierzy kwadratowej $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ (przekształcenia liniowego F) nazywamy wielomian $\chi_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (odpowiednio: $\chi_F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) dany wzorem

$$\chi_A(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \det(A - x\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{pmatrix}$$

(odpowiednio: $\chi_F(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \det(F - x\mathrm{Id})$).

Zauważmy, że dla dowolnej macierzy kwadratowej stopnia 2 zachodzi równość

$$\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A. \tag{4.1}$$

Istotnie, kładąc $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ mamy

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det \left(\begin{smallmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{smallmatrix}\right) &= (a_{11} - x)(a_{22} - x) - a_{21}a_{12} = \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})\, x + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Fakt 4.7. *Liczba rzeczywista λ jest wartością własną macierzy A (przekształcenia liniowego F) wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest pierwiatkiem χ_A (odpowiednio: χ_F).*

Dowód.
$(\Longrightarrow)$

Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy A. Wówczas (na mocy definicji 4.2) istnieje niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^2$ taki, że $AU = \lambda U$, tzn.

$$(A - \lambda\mathbb{I})U = 0.$$

Ponieważ przekształcenie $A - \lambda\mathbb{I}$ posyła niezerowy wektor U w zero, nie może być odwracalne, tzn.

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

czyli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A.

$(\Longleftarrow)$

Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A, tzn $\chi_A(\lambda) = 0$. Czyli zachodzi równość

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0,$$

co oznacza, że macierz $(A - \lambda\mathbb{I})$ nie jest odwracalna. Zatem dla dowolnego $Y \in \mathbb{R}^2$, układ

$$(A - \lambda\mathbb{I})X = Y$$

ma więcej niż jedno rozwiązanie. W szczególności gdy $Y = 0$, układ

$$(A - \lambda\mathbb{I})X = 0$$

nie ma jedynego rozwiązania. Załóżmy więc, że $V, W \in \mathbb{R}^2$, $V \neq W$, są rozwiązaniami powyższego układu. Zatem

$$\begin{cases} (A - \lambda\mathbb{I})V = 0, \\ (A - \lambda\mathbb{I})W = 0, \end{cases}$$

skąd $(A - \lambda\mathbb{I})(V - W) = 0$. Oznaczając $U = V - W$ (zauważmy przy tym, że $U \neq 0$) mamy $(A - \lambda\mathbb{I})U = 0$, tzn.

$$AU = \lambda U,$$

czyli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy A. ■

Zauważmy, iż z faktu 4.7 wynika w szczególności, że macierz A rozmiaru 2×2 ma co najwyżej dwie wartości własne, bo stopień wielomianu χ_A jest równy 2.

Przykład 4.8. Rozważmy macierz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Znajdziemy jej wartości oraz wektory własne. Obliczmy najpierw wielomian charakterystyczny macierzy A. Mamy

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}) = \left|\begin{smallmatrix} 2-x & 0 \\ 1 & 1-x \end{smallmatrix}\right| = (2 - x)(1 - x).$$

Zauważmy, że pierwiastkami χ_A są 1 oraz 2, więc na mocy faktu 4.7 liczby 1 i 2 są wartościami własnymi macierzy A.

Wyliczymy teraz wektory własne macierzy A. Rozpatrzmy układ równań $AX = X$. Oczywiście rozwiązaniem tego układu jest rodzina wektorów własnych odpowiadających wartości własnej 1. Mamy

$$\begin{cases} 2x = x, \\ x + y = y, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = y, \end{cases}$$

więc $X = t\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Stąd wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 1 jest np. $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Postępując analogicznie w przypadku wartości własnej 2, otrzymujemy rodzinę wektorów własnych $\{t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$, skąd wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 2 jest np. $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. ■

Twierdzenie 4.9. *Niech $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ będą liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A, a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ — odpowiadającymi im wartościami własnymi. Wówczas macierz A można przedstawić w postaci $A = PDP^{-1}$, gdzie $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ a P jest macierzą, której kolumnami, pierwszą i drugą, są odpowiednio wektory U_1 oraz U_2, tzn. $P = \left(\begin{smallmatrix} U_1 & U_2 \end{smallmatrix} \right)$.*

Dowód. Niech $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ będą liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A, a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ — odpowiadającymi im wartościami własnymi. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} PE_1 &= U_1, \\ PE_2 &= U_2, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} E_1 &= P^{-1}U_1, \\ E_2 &= P^{-1}U_2. \end{aligned}$$

Niech $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned} PDP^{-1}U_1 = PDE_1 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = P(\lambda_1 E_1) = \\ = \lambda_1(PE_1) = \lambda_1 U_1. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy równość

$$PDP^{-1}U_2 = \lambda_2 U_2.$$

Z drugiej strony (zgodnie z definicją 4.1, względnie 4.2) mamy

$$\begin{aligned} AU_1 &= \lambda_1 U_1, \\ AU_2 &= \lambda_2 U_2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{cases} AU_1 = PDP^{-1}U_1, \\ AU_2 = PDP^{-1}U_2, \end{cases}$$

a skoro wektory U_1 oraz U_2 są liniowo niezależne, to $A = PDP^{-1}$ ■

Definicja 4.10. Macierz kwadratową A nazywamy *diagonalną*, jeśli wszystkie wyrazy macierzy A leżące poza główną przekątną są równe 0.

Definicja 4.11. Macierz kwadratową A nazywamy *diagonalizowalną*, jeśli istnieje odwracalna macierz P oraz diagonalna macierz D, dla których $A = PDP^{-1}$.

Twierdzenie 4.9 jest niezwykle przydatne przy obliczaniu potęg macierzy kwadratowych. Dla danej macierzy diagonalizowalnej A nietrudno sprawdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi równość

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}. \tag{4.2}$$

Jeśli $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Istotnie, sprawdźmy warunek początkowy dla $n = 1$. Mamy

$$D^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D.$$

Załóżmy teraz, że równość (4.3) jest prawdziwa dla $n \geq 1$. Pokażemy, że prawdziwa jest także równość

$$D^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Mamy

$$D^{n+1} = D^nD \overset{\text{z założenia}}{\underset{\text{indukcyjnego}}{=\!=\!=}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix},$$

skąd wnioskujemy, że równość (4.3) zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4.2. Baza wektorów własnych

Rozważmy liniowo niezależne wektory własne $U, V \in \mathbb{R}^2$ macierzy A pewnego przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wówczas dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^2$ można zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów U i V, tzn.

$$X = uU + vV, \tag{4.4}$$

gdzie $u, v \in \mathbb{R}$. Jest jasne, że zbiór $\mathcal{B} = \{U, V\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Zauważmy, że funkcje

$$\begin{aligned} f_1&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(X) = u; \\ f_2&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(X) = v; \end{aligned} \tag{4.5}$$

zadają nowy układ współrzędnych na płaszczyźnie. Współrzędnymi wektora X w bazie $\mathcal{B}$ (w układzie współrzędnych zadanym przez funkcje f_1 oraz f_2) są, odpowiednio pierwszą i drugą, liczby u oraz v, co zapisujemy jako

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

lub, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień,

$$[X] = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Nawiasy kwadratowe będziemy stosowali celem odróżnienia od standardowego układu współrzędnych (tj. wyznaczonego przez wektory E_1 i E_2).

W układzie współrzędnych zadanym przez funkcje f_1 oraz f_2 (tzn. w *bazie wektorów własnych*) przekształceniu F odpowiada macierz diagonalna. Istotnie,

$$\begin{aligned} F\left([X]_{\mathcal{B}}\right) &= F(uU + vV) = uF(U) + vF(V) = u\lambda U + v\mu V = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u \\ \mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ są wartościami własnymi przekształcenia F. Ponadto, współrzędne w układzie zadanym przez funkcje f_1 oraz f_2 są związane ze współrzędnymi w standardowym układzie równaniami

$$X = P\,[X]_{\mathcal{B}}, \qquad [X]_{\mathcal{B}} = P^{-1}X, \tag{4.9}$$

tzn.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

gdzie P jest macierzą, której kolumnami, pierwszą i drugą, są odpowiednio wektory U oraz V, tzn. $P = \left(U \; V \right)$. Macierz P nazywa się *macierzą przejścia* (z bazy $\mathcal{B}$ do standardowej bazy $\mathcal{E}_2$, czyli z układu współrzędnych zadanego przez funkcje f_1 oraz f_2 do standardowego układu współrzędnych).

Przykład 4.12. Powróćmy do przykładu 4.8 i rozważmy macierz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Przypomnijmy, że wartościami własnymi macierzy A są 1 oraz 2, zaś odpowiadającymi im wektorami własnymi — odpowiednio $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wiadomo, że w bazie $\mathcal{B}$ wektorów własnych przekształcenie F zadane jest macierzą diagonalną $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Macierzą przejścia z bazy wektorów własnych $\mathcal{B}$ do bazy standardowej $\mathcal{E}_2$ jest macierz $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zatem $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} v \\ u+v \end{smallmatrix}\right)$, tzn.

$$\begin{cases} x = v, \\ y = u + v, \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = x, \end{cases}$$

czyli $\binom{u}{v} = P^{-1}\binom{x}{y}$, gdzie $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Oczywiście macierz A można przedstawić w postaci $A = PDP^{-1}$.

Znajdziemy teraz obraz punktu $[X]_{\mathcal{B}} = \binom{5}{3}$ przez przekształcenie liniowe F, któremu w standardowym układzie współrzędnych odpowiada macierz A. Mamy

$$AX = PDP^{-1}X = PD\,[X]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\binom{5}{3} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\binom{5}{6} = \binom{6}{11}. \quad \blacksquare$$

4.3. Rozkład Jordana

Nie każda macierz jest diagonalizowalna. Okazuje się jednak, że jeśli dana macierz nie jest diagonalizowalna, można ją przedstawić w tzw. *postaci Jordana*, o czym mówi twierdzenie 4.14.

Lemat 4.13. *Niech λ będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego niezerowej macierzy $A \neq \lambda\mathbb{I}$, tzn. $\chi_A(x) = (x-\lambda)^2$. Wówczas istnieją liniowo niezależne wektory U i W takie, że $AU = \lambda U$ oraz $AW = U + \lambda W$.*

Dowód. Niech λ będzie podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego niezerowego przekształcenia liniowego $F \neq \lambda\mathrm{Id}$, tzn. $\chi_F(x) = (x-\lambda)^2$. Na mocy faktu 4.7 λ jest jedyną wartością własną przekształcenia liniowego F. Niech V będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, zaś W — dowolnym wektorem liniowo niezależnym z V. Wówczas wektor $F(W)$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów V oraz W, tzn. istnieją liczby rzeczywiste α i β takie, że

$$F(W) = \alpha V + \beta W.$$

Rozważmy najpierw przypadek $\lambda \neq 0$. Zauważmy, że

$$\chi_F(x) = x^2 - 2\lambda + \lambda^2,$$

skąd $\det F = \lambda^2 > 0$, więc zgodnie z faktem 2.40 przekształcenie F zachowuje orientację. A zatem

$$\det(V, W)\det(F(V), F(W)) > 0.$$

Co więcej

$$\det(F(V), F(W)) = \lambda^2 \det(V, W),$$

czyli

$$\det(\lambda V, \alpha V + \beta W) = \lambda^2 \det(V, W),$$

skąd

$$\lambda\beta \det(V, W) = \lambda^2 \det(V, W),$$

a zatem, ponieważ $\det(V, W) \neq 0$, $\beta = \lambda$.

Gdy $\lambda = 0$, to z liniowości przekształcenia F mamy

$$F(F(W)) = F(\alpha V + \beta W) = \alpha F(V) + \beta F(W) = \beta F(W).$$

Ponieważ 0 jest jedyną wartością własną przekształcenia F, więc z powyższej równości wynika, że $\beta = 0$ lub $F(W) = 0$. Skoro W był dowolnym wektorem liniowo niezależnym z V, więc gdyby zachodził warunek $F(W) = 0$, to F byłoby przekształceniem zerowym, co prowadziłoby do sprzeczności z założeniem o niezerowości przekształcenia F. Zatem $\beta = 0$, czyli $\beta = \lambda$.

Zauważmy, że dla dowolnego $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, wektor αV jest również wektorem własnym przekształcenia liniowego F. Kładąc zatem $U = \alpha V$ (ten wektor jest niezerowy bo gdyby α była zerem, przekształcenie F byłoby równe $\lambda\mathrm{Id}$), mamy tezę. ■

Twierdzenie 4.14. *Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie jedyną wartością własną niezerowej macierzy $A \neq \lambda\mathbb{I}$. Wówczas istnieje odwracalna macierz P taka, że macierz A można przedstawić w postaci $A = PJP^{-1}$, gdzie $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie jedyną wartością własną niezerowej macierzy $A \neq \lambda\mathbb{I}$. Na mocy lematu 4.13 istnieją liniowo niezależne wektory U i W takie, że $AU = \lambda U$ oraz $AW = U + \lambda W$. Połóżmy $P = \left(\begin{smallmatrix} U & W \end{smallmatrix}\right)$. Oczywiście P jest odwracalna, bo wektory U i W są liniowo niezależne. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} PE_1 &= U, \\ PE_2 &= W, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} E_1 &= P^{-1}U, \\ E_2 &= P^{-1}W. \end{aligned}$$

Połóżmy $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned} PJP^{-1}U &= PJE_1 = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = P(\lambda E_1) = \\ &= \lambda(PE_1) = \lambda U. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} PJP^{-1}W &= PJE_2 = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = P\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right) = \\ &= PE_1 + \lambda(PE_2) = U + \lambda W. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, na mocy lematu 4.13 mamy

$$\begin{aligned} AU &= \lambda U, \\ AW &= U + \lambda W. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{cases} AU = PJP^{-1}U, \\ AW = PJP^{-1}W, \end{cases}$$

a skoro, zgodnie z lematem 4.13, wektory U oraz W są liniowo niezależne, to $A = PJP^{-1}$. ■

Definicja 4.15. Macierz J w twierdzeniu 4.14 nazywamy *macierzą Jordana.*

Definicja 4.16. *Rozkładem Jordana* macierzy kwadratowej A nazywamy przedstawienie macierzy A w postaci PJP^{-1}, gdzie P jest macierzą odwracalną, zaś J — macierzą Jordana.

Podobnie jak twierdzenie 4.9, twierdzenie 4.14 jest niezwykle przydatne przy obliczaniu potęg macierzy kwadratowych. Dla danej macierzy macierzy A, dla której istnieje rozkład Jordana, nietrudno sprawdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi równość

$$A^n = \left(PJP^{-1}\right)^n = PJ^nP^{-1}. \tag{4.11}$$

Jeśli $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mamy

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Istotnie, sprawdźmy warunek początkowy dla $n = 1$. Mamy

$$J^1 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J.$$

Załóżmy teraz, że równość (4.12) jest prawdziwa dla $n \geq 1$. Pokażemy, że prawdziwa jest także równość

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Mamy

$$J^{n+1} = J^nJ \overset{\text{z założenia}}{\underset{\text{indukcyjnego}}{=\!=\!=}} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},$$

skąd wnioskujemy, że równość (4.12) zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rozdział 5

Krzywe drugiego stopnia

5.1. Formy kwadratowe

Definicja 5.1. Funkcję $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ postaci $Q(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, gdzie $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ oraz $a, b, c \in \mathbb{R}$, nazywamy *formą kwadratową* dwóch zmiennych.

Zauważmy przy tym, że $Q(X) = \langle AX, X\rangle$, gdzie $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Macierz A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* Q, tzn. $\mathrm{m}\,(Q) = A$. Pojęcie macierzy formy kwadratowej określa następująca

Definicja 5.2. *Macierzą formy kwadratowej* Q nazywamy dowolną macierz symetryczną[1] $\mathrm{m}\,(Q)$ taką, że dla każdego wektora $X \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość $Q(X) = \langle \mathrm{m}\,(Q)\, X, X\rangle$ lub równoważnie $Q(X) = X^{\mathsf{T}}\mathrm{m}\,(Q)\, X$.

Rozważmy macierz A formy kwadratowej Q oraz odwracalną macierz P, zadającą nowy układ współrzędnych $[X] = PX$. Powstaje pytanie, jaką postać ma macierz A w nowym układzie współrzędnych? Mamy

$$Q(X) = X^{\mathsf{T}}AX = \left(P^{-1}\,[X]\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}\,[X] = [X]^{\mathsf{T}} \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}\,[X]\,. \tag{5.1}$$

Zatem macierz $\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}$ jest macierzą formy kwadratowej Q w nowym układzie współrzędnych. Okazuje się, że macierz ta również jest symetryczna. Istotnie,

$$\left(\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \left(\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}. \tag{5.2}$$

[1] Macierz kwadratową A nazywamy *symetryczną*, jeśli $A = A^{\mathsf{T}}$.

Lemat 5.3. *Niech A będzie dowolną macierzą. Wówczas dla dowolnych wektorów X i Y takich, że operacje AX oraz $A^{\mathsf{T}}Y$ mają sens, zachodzi równość*

$$\langle AX, Y\rangle = \left\langle X, A^{\mathsf{T}}Y \right\rangle . \tag{5.3}$$

Dowód powyższego lematu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 5.4. *Niech A będzie macierzą symetryczną. Wówczas istnieją wektory własne U i V macierzy A takie, że $\|U\| = \|V\| = 1$ oraz $\langle U, V\rangle = 0$. Ponadto, $A = PDP^{-1}$, gdzie P jest macierzą izometrii, a D — macierzą diagonalną.*

Dowód. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Obliczmy wielomian charakterystyczny macierzy A. Mamy

$$\chi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = (x-a)(x-c) - b^2.$$

Wyróżnik χ_A jest równy $(a-c)^2 + 4b^2$, więc χ_A ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Możliwe są dwa przypadki

(1) χ_A ma jeden pierwiastek podwójny.
(2) χ_A ma dwa różne pierwiastki $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Przypadek (1) zachodzi dokładnie wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = 0$. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie pierwiastkiem χ_A. Wówczas $\lambda = a$, skąd $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. Kładąc $D = A$ i $P = \mathbb{I}$ oraz przyjmując $U = E_1$ i $V = E_2$ mamy tezę.

Rozpatrzmy przypadek (2). Niech $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, będą pierwiastkami χ_A. Ponieważ λ oraz μ są wartościami własnymi macierzy A, więc istnieją odpowiadające im wektory własne U oraz V. Zauważmy przy tym, że U i V są liniowo niezależne, bo $\lambda \neq \mu$. Co więcej U oraz V można dobrać tak, by $\|U\| = \|V\| = 1$. Ponadto

$$\begin{aligned} \lambda\langle U, V\rangle &= \langle \lambda U, V\rangle = \langle AU, V\rangle \overset{*}{=} \left\langle U, A^{\mathsf{T}}V \right\rangle = \langle U, AV\rangle = \langle U, \mu V\rangle = \\ &= \mu\langle U, V\rangle , \end{aligned}$$

gdzie równość oznaczona symbolem $*$ wynika z lematu 5.3. Stąd

$$(\lambda - \mu)\langle U, V\rangle = 0,$$

więc $\langle U, V\rangle = 0$, bo $\lambda \neq \mu$. Kładąc $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ oraz $P = \left(U \; V \right)$, która na mocy faktu 3.12 jest macierzą izometrii, mamy tezę. ■

Rozważmy macierz A formy kwadratowej Q. Oczywiście A jest symetryczna, zatem na mocy twierdzenia 5.4 istnieją macierz izometrii P oraz macierz diagonalna D takie, że $A = PDP^{-1}$. Ponieważ P jest macierzą izometrii, więc $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$ (zgodnie z wnioskiem 3.13). Wówczas

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^{\mathsf{T}}AX = X^{\mathsf{T}}PDP^{-1}X = X^{\mathsf{T}}\left(P^{-1}\right)^{-1}DP^{-1}X = \\ &= X^{\mathsf{T}}\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}}DP^{-1}X = \left(P^{-1}X\right)^{\mathsf{T}}D\left(P^{-1}X\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ oraz $[X] = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$. Wtedy $[X] = P^{-1}X$ jest prostkokątnym układem współrzędnych, zadanym przez macierz P^{-1}. Z równości (5.4) otrzymujemy

$$Q([X]) = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)^{\mathsf{T}} D \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right),$$

co oznacza, iż D jest macierzą formy kwadratowej Q w układzie współrzędnych zadanym przez macierz P^{-1}. Ponadto wiedząc, że $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ mamy

$$Q([X]) = \lambda\left(x'\right)^2 + \mu\left(y'\right)^2. \tag{5.5}$$

Wyrażenie po prawej stronie równości (5.5) nazywamy *postacią kanoniczną* formy kwadratowej Q.

5.2. Krzywe drugiego stopnia

Krzywymi drugiego stopnia nazywamy krzywe zadane równaniem postaci

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{5.6}$$

gdzie $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, przy czym $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Wyrazy $ax^2, 2bxy, cy^2$ nazywamy *wyrazami kwadratowymi*, wyrazy $2dx, 2ey$ — *wyrazami liniowymi*, zaś f — *wyrazem wolnym*.

Przykład 5.5. *Okrąg* o środku w punkcie $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ i promieniu $r > 0$ jest zamkniętą krzywą drugiego stopnia o równaniu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$ ■

Przykład 5.6. *Elipsa* o środku w punkcie $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ jest zamkniętą krzywą drugiego stopnia o równaniu

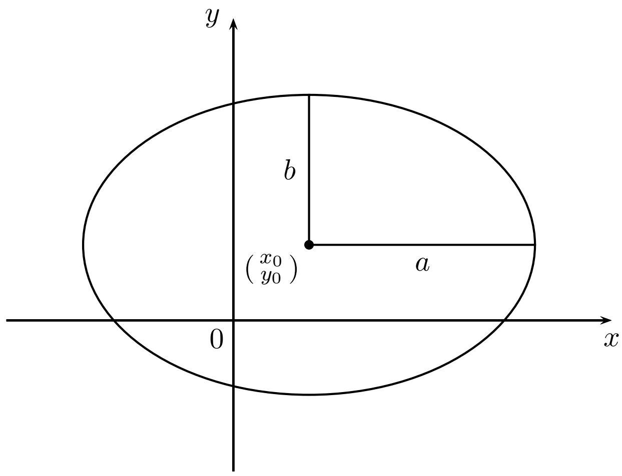
$$\tfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \tfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 1). Przypomnijmy, że (zob. przykład 2.37) elipsa o środku w 0 jest obrazem okręgu o środku w 0 i promieniu 1 (czyli okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$) przez przekształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. ■

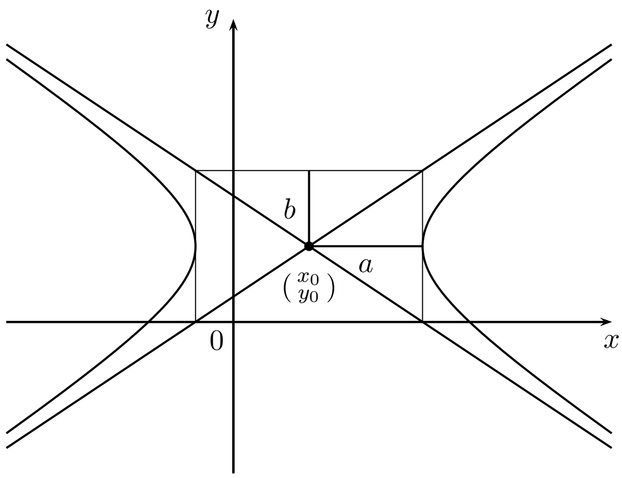
Przykład 5.7. *Hiperbola* o środku w punkcie $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ jest krzywą drugiego stopnia o równaniu

$$\tfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \tfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 2). ■



Rysunek 1



Rysunek 2

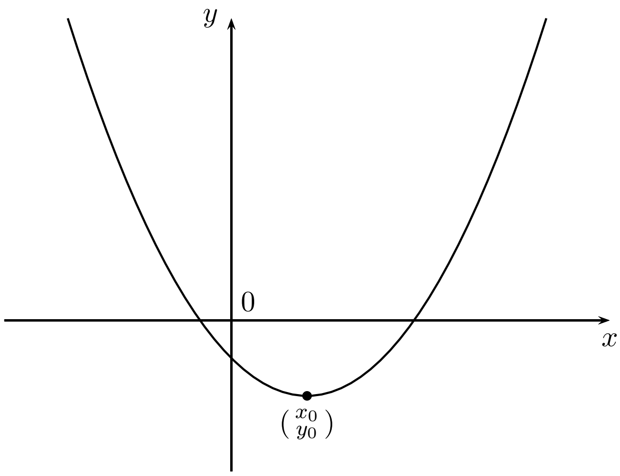
Przykład 5.8. *Parabola* o wierzchołku w punkcie $\binom{x_0}{y_0}$ jest krzywą drugiego stopnia o równaniu

$$a(x - x_0)^2 - (y - y_0) = 0,$$

gdzie $\mathbb{R} \ni a \neq 0$ (por. rys. 3). ■

Postaramy się teraz dobrać prostokątny układ współrzędnych tak, aby możliwie uprościć równanie (5.6).

Przypomnijmy (zob. str. 51), że liniowy układ współrzędnych zadany jest przez parę liniowo niezależnych wektorów $U, V \in \mathbb{R}^2$. Wtedy dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^2$ można zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów U



Rysunek 3

i V, tzn.

$$X = uU + vV, \tag{5.7}$$

gdzie $u, v \in \mathbb{R}$ są współrzędnymi X, odpowiednio pierwszą i drugą, w układzie współrzędnych wyznaczonym przez liniowo niezależne wektory U i V. Układ taki nazywamy *prostokątnym*, jeśli $U \perp V$ oraz $\|U\| = \|V\| = 1$.

Zauważmy, że każdy prostokątny układ współrzędnych powstaje z układu standardowego przez pewną izometrię. Istotnie, macierz, która przekształca wektory E_1 i E_2 w wektory U i V odpowiednio, to po prostu macierz (U, V), której kolumnami są U i V. Kolumny te są prostopadłe i mają długość 1 więc jest to macierz izometrii.

Zajmijmy się najpierw usunięciem wyrazów liniowych z równania (5.6). Niech

$$\begin{cases} x' = x + g, \\ y' = y + h, \end{cases} \tag{5.8}$$

gdzie $g, h \in \mathbb{R}$. Układ (5.8) można zapisać w postaci

$$\begin{cases} x = x' - g, \\ y = y' - h, \end{cases} \tag{5.9}$$

skąd, wstawiając x oraz y do (5.6), otrzymujemy po przekształceniu równanie

$$\begin{aligned} a\left(x'\right)^2 + 2bx'y' + c\left(y'\right)^2 - 2(ag + bh - d)x' - 2(bg + ch - e)y' + \\ + ag^2 + ch^2 + 2(bgh - dg - eh) + f = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dobierzmy g oraz h tak, by równanie (5.6) we współrzędnych x' i y' nie miało wyrazów liniowych, to znaczy, zgodnie z (5.10), aby

$$(ag + bh - d)x' + (bg + ch - e)y' = 0. \tag{5.11}$$

Aby równość (5.11) była spełniona dla wszystkich $x', y' \in \mathbb{R}$, należy tak dobrać g oraz h, by

$$\begin{cases} ag + bh = d, \\ bg + ch = e. \end{cases} \tag{5.12}$$

Zauważmy, że jeśli $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| \neq 0$, to układ (5.12) ma jedyne rozwiązanie postaci

$$g = \frac{cd - be}{ac - b^2}, \qquad h = \frac{ae - bd}{ac - b^2}. \tag{5.13}$$

Wówczas równanie krzywej (5.6) w prostokątnym układzie współrzędnych $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right)$ przyjmuje postać

$$a\,(x')^2 + 2bx'y' + c\,(y')^2 + \tilde{f} = 0, \tag{5.14}$$

gdzie $\tilde{f} = ag^2 + ch^2 + 2(bgh - dg - eh) + f$.

Niech Q będzie formą kwadratową o macierzy $\mathrm{m}\,(Q) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, przy czym $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Wówczas równanie krzywej (5.6) w prostokątnym układzie współrzędnych $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right)$, gdzie g oraz h są postaci (5.13), przyjmuje postać

$$Q(X') + \tilde{f} = 0, \tag{5.15}$$

gdzie $X' = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$. Na mocy równości (5.5) otrzymujemy zatem, że równanie krzywej (5.6) w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\lambda\,(x'')^2 + \mu\,(y'')^2 + \tilde{f} = 0. \tag{5.16}$$

Równanie (5.16) nazywamy *postacią kanoniczną* równania (5.6).

Przykład 5.9. Rozważmy krzywą daną równaniem $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$. Rówanie tej krzywej można napisać w postaci $Q(X) - 3 = 0$, gdzie $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, zaś Q jest formą kwadratową o macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Jak nietrudno sprawdzić, wartościami własnymi macierzy A są liczby $-\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$, zaś np. $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ oraz $V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ — odpowiadającymi im wektorami własnymi. Zatem $A = PDP^{-1}$, gdzie $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ oraz $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Równanie tej krzywej można zapisać w postaci kanonicznej
$$-\tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{3}{2}(y')^2 - 3 = 0,$$
lub równoważnie
$$\tfrac{(x')^2}{(\sqrt{6})^2} - \tfrac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = -1.$$
A zatem krzywa dana równaniem $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$ jest hiperbolą. ■

Rozdział 6

Liczby zespolone

6.1. Wstęp

Definicja 6.1. *Zbiorem liczb zespolonych* nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych $\mathbb{C} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Definicja 6.2. Niech $\mathbb{C} \ni z = (x, y)$. Liczby x oraz y nazywać będziemy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *częścią urojoną* liczby zespolonej z. Część rzeczywistą liczby z oznaczać będziemy symbolem $\operatorname{Re} z$ lub $\Re z$, zaś część urojoną — symbolem $\operatorname{Im} z$ lub $\Im z$.

Definicja 6.3. Dwie liczby zespolone (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$, tzn. zarówno ich części rzeczywiste, jak i urojone są równe.

W zbiorze liczb zespolonych wprowadzamy podstawowe działania *dodawania* i *mnożenia*. Dla danych liczb zespolonych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) określamy odpowiednio ich sumę oraz iloczyn wzorami

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{6.1}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \tag{6.2}$$

Podobnie jak zbiór liczb rzeczywistych utożsamiać można z prostą a jego elementy z punktami na prostej, tak zbiór liczb zespolonych można utożsamiać z płaszczyzną, a jego elementy z punktami na płaszczyźnie lub z wektorami kolumnowymi zaczepionymi w początku układu współrzędnych (rys.1). Oś odciętych nazywać będziemy *osią rzeczywistą*, zaś oś rzędnych — *osią urojoną*.

Stwierdzenie 6.4. *Niech* $\mathbf{0} = (0,0)$ *oraz* $\mathbf{1} = (1,0)$*. Wówczas dla dowolnych liczb zespolonych* x, y, z *mamy*

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ *(łączność dodawania)*

(2) $x+y = y+x$ *(przemienność dodawania)*

(3) $x + \mathbf{0} = x$

(4) *istnieje jedyna liczba zespolona* w *taka, że* $x + w = \mathbf{0}$

(5) $(xy)z = x(yz)$ *(łączność mnożenia)*

(6) $xy = yx$ *(przemienność mnożenia)*

(7) $\mathbf{1} \cdot x = x$

(8) *jeśli* $x \neq \mathbf{0}$*, to istnieje jedyna liczba zespolona* w *taka, że* $xw = \mathbf{1}$

(9) $x(y+z) = xy + xz$ *(rozdzielność mnożenia względem dodawania)*

Liczbę $\mathbf{0}$ nazywamy *elementem neutralnym dodawania*, zaś liczbę $\mathbf{1}$ — *elementem neutralnym mnożenia*. Ponadto, liczbę w o własności (4) nazywamy *liczbą przeciwną* do liczby x i oznaczamy przez $-x$. Natomiast liczbę w o własności (8) nazywamy *liczbą odwrotną* do liczby x i oznaczamy przez x^{-1} lub $\frac{1}{x}$.

Dowód. Własności (1)–(7) oraz (9) są bezpośrednią konsekwencją wzorów (6.1) i (6.2) oraz aksjomatów liczb rzeczywistych. Udowodnimy jedynie własność (8).

Niech $x = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$ oraz $w = (w_1, w_2)$. Zauważmy, że równość $xw = \mathbf{1}$, tj.

$$(x_1, x_2) \cdot (w_1, w_2) = (1, 0),$$

można zapisać w postaci

$$\begin{cases} x_1 w_1 - x_2 w_2 = 1, \\ x_2 w_1 + x_1 w_2 = 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

Z założenia wiemy, że $x \neq \mathbf{0}$, tzn. $x_1^2 + x_2^2 > 0$, skąd wynika, iż wyznacznik główny układu (6.3) jest różny od 0. Zatem układ (6.3) ma jedyne rozwiązanie. ■

Co więcej, z dowodu własności (8) stwierdzenia 6.4 oraz wzorów (1.14) wynika, że jeśli $\mathbb{C} \ni z = (x, y) \neq \mathbf{0}$, to

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right). \tag{6.4}$$

6.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej

Liczby zespolone postaci $(x, 0)$, tj. o części urojonej równej 0, będziemy utożsamiać z liczbami rzeczywistymi, tzn. będziemy pisać $(x, 0) \overset{\text{ozn}}{=} x$.

Rozważmy liczbę $i \overset{\text{ozn}}{=} (0, 1)$. Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \overset{\text{ozn}}{=} -1, \tag{6.5}$$

skąd wynika formalna definicja jednostki urojonej.

Definicja 6.5. *Jednostką urojoną* i nazywamy liczbę, której kwadrat równa się -1.

Zauważmy, że każdą liczbę zespoloną postaci $(0, y)$, tj. o części rzeczywistej równej 0, można zapisać następująco

$$(0, y) = (y, 0) \cdot (0, 1) \overset{\text{ozn}}{=} yi. \tag{6.6}$$

Liczby zespolone postaci $(0, y) \overset{\text{ozn}}{=} yi$ nazywać będziemy *liczbami urojonymi.*

A zatem, każdą liczbę zespoloną $z = (x, y)$ można przedstawić w postaci

$$z = x + yi, \tag{6.7}$$

tzn. jako sumę liczby rzeczywistej i urojonej. Postać (6.7) liczby zespolonej nazywa się *postacią algebraiczną* lub *ogólną* liczby zespolonej.

Ponadto, zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ można rozpatrywać jako podzbiór zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$, tzn. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Zapis liczb zespolonych w postaci algebraicznej w praktyce jest o wiele wygodniejszy od zapisu w postaci par uporządkowanych. Wszelkie rachunki na liczbach zespolonych można bowiem wykonywać dokładnie tak samo, jak na liczbach rzeczywistych, pamiętając jedynie o tym, że $i^2 = -1$.
A zatem, *dodawanie* i *mnożenie* liczb zespolonych $z_1 = x_1 + y_1 i$ oraz $z_2 = x_2 + y_2 i$ można określić wzorami

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{6.8}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \tag{6.9}$$

Odejmowanie i *dzielenie* liczb zespolonych $z_1 = x_1 + y_1 i$ oraz $z_2 = x_2 + y_2 i$ określa się jako działania odwrotne odpowiednio do dodawania i mnożenia wzorami

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \tag{6.10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} i, \tag{6.11}$$

przy czym wzór (6.11) ma sens dla $z_2 \neq 0$.

Definicja 6.6. *Liczbą sprzężoną* z liczbą zespoloną $z = x + yi$ nazywamy liczbę $\overline{z} = x - yi$.

Z powyższej definicji wynika, że jeśli $z = \overline{z}$, to z jest liczbą rzeczywistą.

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1 oraz z_2 zachodzą równości

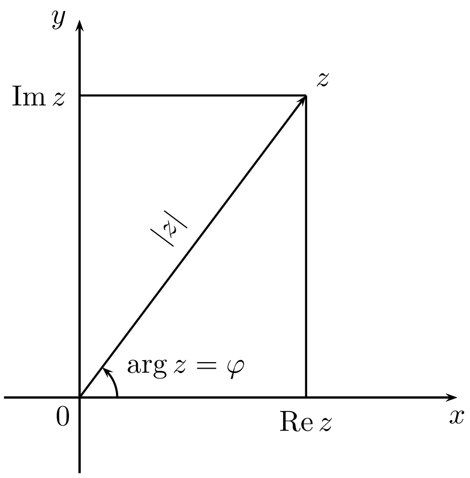
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{6.12}$$

oraz

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{6.13}$$

6.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja 6.7. *Modułem* liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $\sqrt{x^2 + y^2}$. Moduł liczby zespolonej z oznaczamy symbolem $|z|$.



Rysunek 1

Jest oczywiste, że moduł liczby zespolonej $z = x + yi$ równa się odległości punktu (x, y) od początku układu współrzędnych (por. rys. 1). Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1 oraz z_2 zachodzi

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \tag{6.14}$$

oraz

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,. \tag{6.15}$$

Nierówność (6.15) nazywa się *nierównością trójkąta.*

Zauważmy, że

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \tag{6.16}$$

skąd w szczególności wynika, że iloczyn dwóch liczb sprzężonych z i $\overline{z}$ jest liczbą rzeczywistą i że dla $\mathbb{C} \ni z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{6.17}$$

Każdą liczbę zespoloną $z = x + yi \neq 0$ można zapisać w postaci

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|} i \right).$$

Zauważmy przy tym, że

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}, \tag{6.18}$$

gdzie φ jest kątem między osią rzeczywistą a wektorem $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ (por. rys. 1). Stąd każdej liczbie zespolonej $z = x + yi \neq 0$ nadać można następującą *postać trygonometryczną*

$$z = |z| \, (\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{6.19}$$

Oczywiście $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$. Stąd, jeśli $z = 0$, to równość (6.19) jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej φ.

Definicja 6.8. Liczbę rzeczywistą φ określoną równaniami (6.18) nazywamy *argumentem* liczby zespolonej $z \neq 0$ i oznaczamy przez $\arg z$. *Argumentem* liczby $z = 0$ nazywamy dowolną liczbę rzeczywistą φ.

Zauważmy przy tym, że dla liczby zespolonej $z \neq 0$ argument $\arg z$ nie jest wyznaczony jednoznacznie. Istotnie, dowolna liczba różniąca się od φ o całkowitą wielokrotność 2π , tzn.

$$\varphi + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ też spełnia definicję argumentu.

Definicja 6.9. *Argumentem głównym* liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\varphi \in (-\pi, \pi]$ określoną równaniami (6.18). Argument główny liczby zespolonej $z \neq 0$ oznaczamy przez $\operatorname{Arg} z$.

Z powyższych rozważań wynika, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swój moduł i argument. A zatem, równoważnie z definicją 6.3, równość liczb zespolonych określa następująca

Definicja 6.10. Dwie liczby zespolone $z_1 \neq 0$ oraz $z_2 \neq 0$ są *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz istnieje liczba całkowita k taka, że $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$, tzn. gdy ich moduły są równe i ich argumenty są równe z dokładnością do wielokrotności liczby 2π.

Korzystając z wzorów (6.9) i (6.11), dla danych w postaci trygonometrycznej liczb zespolonych $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos\psi + i\sin\psi)$ określić można działania *mnożenia* oraz *dzielenia* wzorami

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \tag{6.20}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)), \tag{6.21}$$

przy czym wzór (6.21) ma sens dla $|z_2| \neq 0$.

Zauważmy, że z wzorów (6.20) i (6.21) wynikają równości

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{6.22}$$

oraz

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{6.23}$$

Stosując indukcję matematyczną do wzoru (6.20) nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej liczby zespolonej $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oraz dla $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi następujący *wzór de Moivre'a*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{6.24}$$

Definicja 6.11. Liczbę zespoloną y nazywamy *pierwiastkiem stopnia* n z liczby zespolonej z, jeśli $y^n = z$.

Niech $y = |y|(\cos\psi + i\sin\psi)$ będzie pierwiastkiem stopnia n z liczby $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, tzn. $y^n = z$. Korzystając ze wzoru (6.24) mamy więc równość

$$|y|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{6.25}$$

A zatem, zgodnie z definicją 6.10

$$|y|^n = |z| \tag{6.26}$$

oraz

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \tag{6.27}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$|y| = \sqrt[n]{|z|} \tag{6.28}$$

oraz

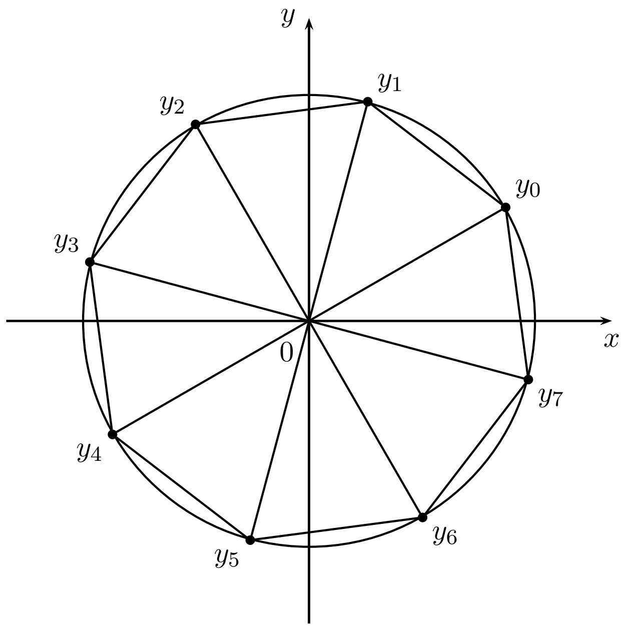
$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{6.29}$$

Jest jasne, że istnieje dokładnie n argumentów postaci (6.29), które nie różnią się o wielokrotność liczby 2π. A zatem istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$, danych wzorem

$$y_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \tag{6.30}$$

gdzie $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ponieważ wszystkie pierwiastki y_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ mają moduły równe $\sqrt[n]{|z|}$ oraz kolejne argumenty różnią się o $\frac{2\pi}{n}$, więc y_k są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ (rys. 2).



Rysunek 2

6.4. Równania algebraiczne

Przykład 6.12. Rozpatrzmy równanie

$$z^4 = -1.$$

Jak wiadomo, nie ma ono rozwiązań rzeczywistych. Jednakże ma ono dokładnie cztery rozwiązania zespolone. Istotnie, liczbę -1 możemy zapisać w postaci trygonometrycznej następująco

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Wówczas, zgodnie ze wzorem (6.30), dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right),$$

skąd

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
z_1 &= \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
z_2 &= \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
z_3 &= \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.
\end{aligned}$$ ■

Twierdzenie 6.13. *Niech $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych. Wówczas istnieje liczba zespolona y taka, że $P(y) = 0$.*

Co więcej, z twierdzenia 6.13 wynika, że każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych można przedstawić jako iloczyn wielomianów stopnia 1, tzn. jeśli $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ jest wielomianem stopnia $n > 0$, to

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z - y_k). \tag{6.31}$$

Istotnie, dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy teraz, że teza jest prawdziwa dla wielomianów stopnia mniejszego od n. Z twierdzenia 6.13 wynika, że $P(y_n) = 0$ dla pewnego $y_n \in \mathbb{C}$. Na mocy twierdzenia Bézout[1] istnieje wielomian[2] $Q(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ stopnia $n-1$ taki, że

$$P(z) = (z - y_n)Q(z). \tag{6.32}$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$Q(z) = b_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(z - y_k), \tag{6.33}$$

[1]Liczba y jest pierwiastkiem wielomianu $P(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $P(z)$ jest podzielny przez dwumian $z - y$.

[2]Ogólnie, jeśli $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ jest wielomianem stopnia $n > 0$, to

$$P(z) = (z - y)Q(z) + P(y),$$

gdzie $Q(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ jest wielomianem stopnia $n - 1$, przy czym $b_{n-1} = a_n$ oraz $b_k = b_{k+1}y + a_{k+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

skąd

$$P(z) = (z - y_n)b_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(z - y_k) = a_n\prod_{k=1}^{n}(z - y_k). \tag{6.34}$$

Z powyższych rozważań wynika następujący

Wniosek 6.14. Wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (niekoniecznie różnych).

Fakt 6.15. *Niech $P(z)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas $P(y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\overline{y}) = 0$.*

Dowód. Niech $P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$, gdzie $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Zauważmy, że

$$\overline{P(y)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k y^k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k y^k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k}(\overline{y})^k = \sum_{k=1}^{n} a_k(\overline{y})^k = P(\overline{y}),$$

skąd wprost wynika teza. ■

Zauważmy, iż z faktu 6.15 w szczególności wynika dobrze znany

Wniosek 6.16. Wielomian nieparzystego stopnia ma przynajmniej jeden rzeczywisty pierwiastek.

Na zakończenie rozdziału przyjrzyjmy się przykładowi zastosowania liczb zespolonych w codziennym życiu.

Przykład 6.17. Powiedzmy, że chcemy zdiagonalizować macierz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Jej wielomianem charakterystycznym jest $x^2 + 1$ nie mający rzeczywistych miejsc zerowych. Jednak jeśli potraktujemy x jak zmienną zespoloną, łatwo zgadniemy, że pierwiastkami są liczby i oraz $-i$. W tego typu przypadkach mówimy, że rzeczywista macierz A ma zespolone wartości własne. Spróbujmy znaleźć wektory własne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ Na przykład } x = 1\ y = i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix \\ -iy \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ Na przykład } x = i\ y = 1$$

A zatem wektorami własnymi (zespolonymi) dla wartości własnych i oraz $-i$ są odpowiednio wektory $U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ oraz $V = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

W rozdziale 4. nauczyliśmy się zapisywać niektóre macierze A jako PDP^{-1} gdzie $P = (U, V)$ a $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ gdzie λ_i są wartościami własnymi A.

Spróbujmy podobnie zapisać naszą macierz $A = PDP^{-1}$ Macierz $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Łatwo policzyć, że $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A zatem jeśli wyniki z rozdziału 4. można stosować w tego typu przypadkach, mielibyśmy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wystarczy wymnożyć macierze by przekonać się, że rzeczywiście tak jest. Powyższa procedura to diagonalizacja macierzy o wyrazach rzeczywistych nad ciałem liczb zespolonych.

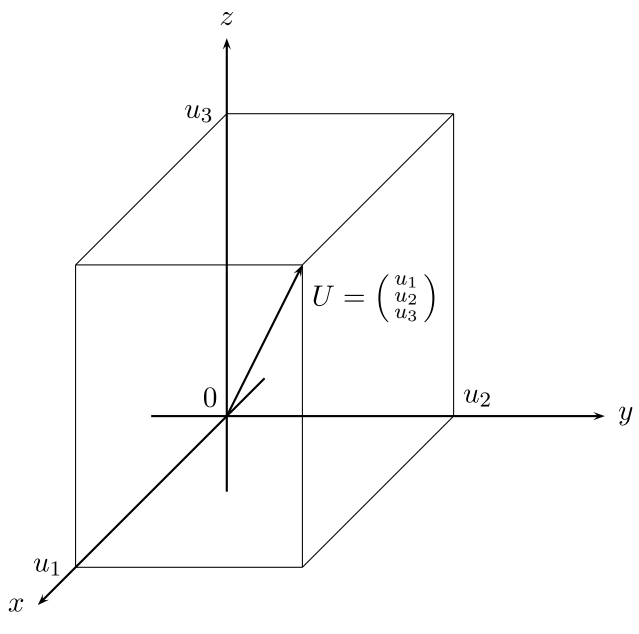
$\blacksquare$

Rozdział 7

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$

7.1. Pojęcia wstepne

Definicja 7.1. *Przestrzenią rzeczywistą* nazywamy zbiór punktów $\mathbb{R}^3 \overset{\text{df}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.



Rysunek 1

Podobnie jak w przypadku punktów płaszczyzny, punkty w przestrzeni utożsamiać będziemy z wektorami kolumnowymi zaczepionymi w początku układu współrzędnych w przestrzeni, tj. w punkcie $0 \overset{\text{ozn}}{=} \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Analogicznie jak na wektorach na płaszczyźnie, na wektorach w przestrzeni określamy podstawowe działania *dodawania* i *mnożenia przez skalary*, tzn. dla danych wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{smallmatrix}\right)$ i $V = \left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{smallmatrix}\right)$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej t mamy odpowiednio

$$U + V = \begin{pmatrix}u_1 + v_1\\u_2 + v_2\\u_3 + v_3\end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$t \cdot U = \begin{pmatrix}t \cdot u_1\\t \cdot u_2\\t \cdot u_3\end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Łatwo sprawdzić, że przestrzeń $\mathbb{R}^3$ spełnia aksjomaty przestrzeni liniowej (patrz: stwierdzenie 1.3).

Przyjmując

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

każdy wektor $U = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{smallmatrix}\right)$ możemy zapisać w postaci

$$U = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3.$$

Wektory E_1, E_2 oraz E_3 nazywamy *wersorami osi* układu współrzędnych w przestrzeni.

Definicja 7.2. *Kombinacją liniową* wektorów U, V i W nazywamy wektor $Z = \lambda U + \mu V + \nu W$, gdzie $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Jest jasne, że każdy wektor $U \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci jedynej kombinacji liniowej wektorów E_1, E_2 i E_3. Istotnie, przypuśćmy, że $U = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3 = u_1'E_1 + u_2'E_2 + u_3'E_3$. Wówczas

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix}$$

czyli $u_1 = u_1'$, $u_2 = u_2'$ oraz $u_3 = u_3'$.

Zbiór $\mathcal{E}_3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ nazywać będziemy *standardową bazą* przestrzeni $\mathbb{R}^3$, zaś wektory E_1, E_2 oraz E_3 — *standardowymi wektorami bazowymi* przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Dla danych wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ określamy ich *iloczyn skalarny* wzorem

$$\langle U, V\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{7.3}$$

Normę (długość) wektora U określamy analogicznie jak na płaszczyźnie, tj.

$$\|U\| \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{\langle U, U\rangle}. \tag{7.4}$$

Jeśli zatem $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, to $\|U\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Cosinus kąta między niezerowymi wektorami U i V określamy wzorem

$$\cos\angle(U, V) = \frac{\langle U, V\rangle}{\|U\|\,\|V\|}. \tag{7.5}$$

Wszystkie własności przedstawione w podrozdziale 1.2 zachodzą również dla wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Warto wrócić do tego rozdziału i przeczytać go myśląc o przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7.2. Iloczyn wektorowy

Definicja 7.3. *Iloczynem wektorowym* wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ nazywamy wektor

$$U \times V \stackrel{\text{df}}{=} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} E_3. \tag{7.6}$$

Stwierdzenie 7.4. *Dla dowolnych $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ i skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące własności*

(1) *dwuliniowość iloczynu wektorowego*
  (a) $(\alpha U + \beta V) \times W = \alpha(U \times W) + \beta(V \times W)$
  (b) $U \times (\alpha V + \beta W) = \alpha(U \times V) + \beta(U \times W)$
(2) $U \times V = -(V \times U)$ *(antysymetryczność)*
(3) *reguła śruby prawoskrętnej*
  (a) $E_1 \times E_2 = E_3$
  (b) $E_2 \times E_3 = E_1$
  (c) $E_3 \times E_1 = E_2$

Zauważmy, że z antysymetryczności iloczynu wektorowego w szczególności wynika, iż dla dowolnego wektora $U \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość

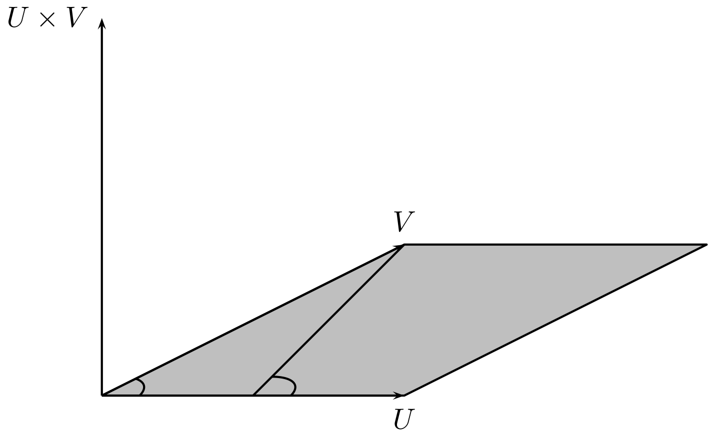
$$U \times U = 0. \tag{7.7}$$

Fakt 7.5. *Wektor $U \times V$ jest prostopadły do wektorów U i V.*

Dowód.

$$\begin{aligned}\langle U \times V, U\rangle &= \left\langle \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} E_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} E_3, U \right\rangle = \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \langle E_1, U\rangle - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \langle E_2, U\rangle + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \langle E_3, U\rangle = \\ &= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 - u_1u_2v_3 + u_2u_3v_1 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0.\end{aligned}$$

Analogicznie pokazuje się, że $\langle U \times V, V\rangle = 0$. ■



Rysunek 2

Fakt 7.6. *Dla dowolnych wektorów U i V zachodzi równość*

$$\|U \times V\| = \|U\|\,\|V\| \sin \angle(U, V).$$

Dowód. Niech $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\|U \times V\|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = \\ &= \|U\|^2\,\|V\|^2 - \langle U, V\rangle^2 = \|U\|^2\,\|V\|^2 \Big(1 - (\cos \angle(U, V))^2\Big) = \\ &= \|U\|^2\,\|V\|^2 (\sin \angle(U, V))^2.\end{aligned}$$ ■

Zauważmy, że z faktu 7.6 w szczególności wynika, iż pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jest równe $\|U \times V\|$ (por. rys. 2).

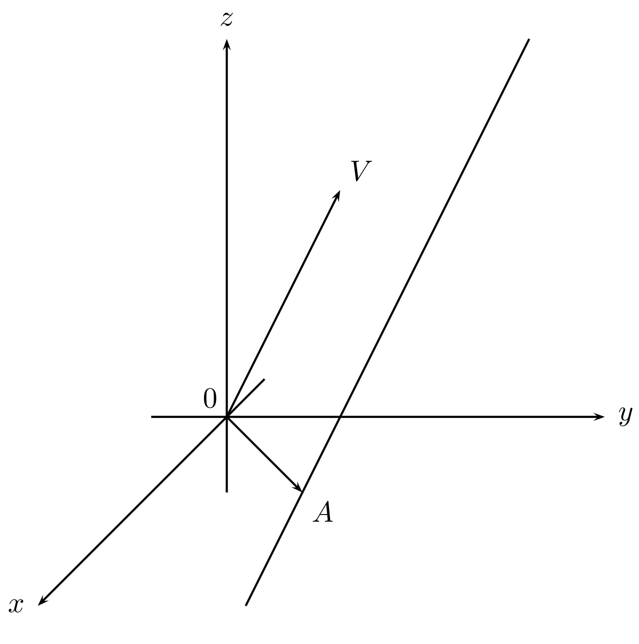
7.3. Proste w przestrzeni

Równanie parametryczne prostej w przestrzeni ma postać

$$X = A + tV, \tag{7.8}$$

gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ jest pewnym punktem prostej, zaś $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ — *niezerowym* wektorem kierunkowym prostej (patrz rys. 3). Zauważmy, że równanie (7.8) można zapisać w postaci układu równań

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1, \\ y = a_2 + tv_2, \\ z = a_3 + tv_3. \end{cases} \tag{7.9}$$



Rysunek 3

W przypadku, gdy wektor kierunkowy nie jest dany *explicite*, a wiadomo, że prosta przechodzi przez punkty A i B, równanie (7.8) przyjmuje postać

$$X = A + t(B - A). \tag{7.10}$$

Przy założeniu, że $v_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, 3$ w układzie (7.9), eliminując zmienną t z układu (7.9) otrzymujemy dwa równania

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}, \tag{7.11}$$

nazywane *równaniami kanonicznymi* prostej w przestrzeni. Jeśli którakolwiek z liczb v_i, $i = 1, 2, 3$ jest równa 0, np. $v_3 = 0$, to równania kanoniczne są postaci

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}, \qquad z-a_3=0. \tag{7.12}$$

W przypadku, gdy np. $v_2 = v_3 = 0$, to równania kanoniczne przyjmują postać

$$y-a_2=0, \qquad z-a_3=0. \tag{7.13}$$

Przykład 7.7. Rozpatrzmy prostą mającą kierunek wektora $V=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ oraz przechodzącą przez punkt $A=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Zgodnie z (7.8) oraz (7.9), jej równanie parametryczne ma postać

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)+t\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1+t\\2t\\1+3t\end{smallmatrix}\right) \text{ lub równoważnie } \begin{cases} x=1+t,\\ y=2t,\\ z=1+3t.\end{cases}$$

Równania kanoniczne prostej mają zatem postać

$$x-1=\tfrac{y}{2}=\tfrac{z-1}{3}.$$

■

Przykład 7.8. Rozważmy prostą daną równaniami

$$\tfrac{3x-8}{7}=\tfrac{y+3}{8}=\tfrac{-8z+3}{5}.$$

Przekształcając powyższe równania do postaci kanonicznej otrzymujemy

$$\frac{x-\frac{8}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{y-(-3)}{8}=\frac{z-\frac{3}{8}}{-\frac{5}{8}},$$

więc równanie parametryczne prostej ma postać

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-3\\\frac{3}{8}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\8\\-\frac{5}{8}\end{pmatrix},$$

gdzie $t\in\mathbb{R}$. ■

Przykład 7.9. Znajdziemy równanie parametryczne prostej l danej równaniami kanonicznymi

$$x-a_1=0, \qquad y-a_2=0.$$

Zauważmy, że prosta l jest zbiorem punktów $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3$ takich, że $x=a_1$ oraz $y=a_2$, tzn. $l=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\\t\end{smallmatrix}\right): t\in\mathbb{R}\right\}$. Równanie parametryczne prostej l ma zatem postać

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\\0\end{smallmatrix}\right)+t\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right),$$

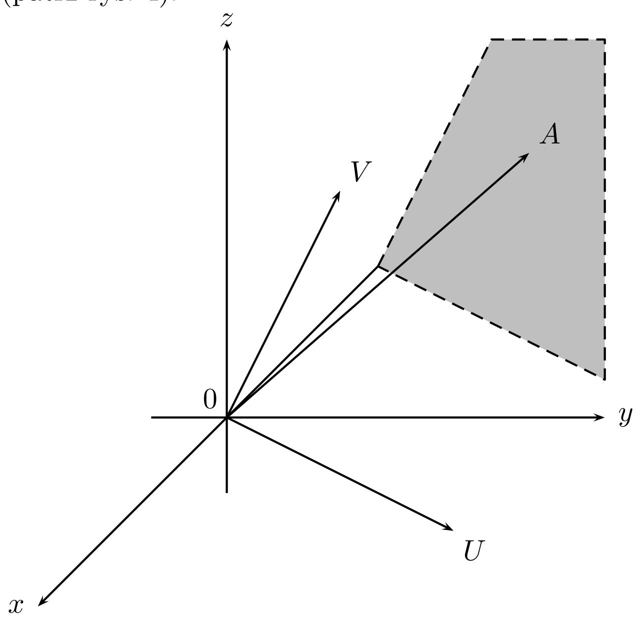
gdzie $t\in\mathbb{R}$. ■

7.4. Płaszczyzny w przestrzeni

Równanie parametryczne płaszczyzny w przestrzeni ma postać

$$X = A + sU + tV, \tag{7.14}$$

gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ jest pewnym wektorem płaszczyzny, zaś $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ oraz $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ — *niewspółlinowymi* wektorami rozpinającymi płaszczyznę (patrz rys. 4).



Rysunek 4

Zauważmy, iż równanie (7.14) jest po prostu skróconym zapisem układu równań

$$\begin{cases} x = a_1 + su_1 + tv_1, \\ y = a_2 + su_2 + tv_2, \\ z = a_3 + su_3 + tv_3. \end{cases} \tag{7.15}$$

W przypadku, gdy wektory rozpinające płaszczyznę nie są dane *explicite*, a wiadomo, że płaszczyzna przechodzi przez punkty A, B i C, równanie (7.14) przyjmuje postać

$$X = A + s(B - A) + t(C - A). \tag{7.16}$$

Przykład 7.10. Rozpatrzmy płaszczyznę rozpinaną przez wektory $U = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$ i $V = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ oraz przechodzącą przez punkt $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Zgodnie z (7.14) oraz (7.15), jej równanie parametryczne ma postać

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\3\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1+s\\-1+s+t\\1+3s-t\end{smallmatrix}\right)$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = -1 + s + t, \\ z = 1 + 3s - t. \end{cases}$$

Wstawiając $s = x - 1$ oraz $t = y - x + 2$ (otrzymane z dwóch pierwszych równań w powyższym układzie) do trzeciego równania w układzie, dostajemy po przekształceniu *równanie ogólne* płaszczyzny

$$4x - y - z - 4 = 0. \qquad \blacksquare$$

Zajmijmy się szerzej równaniem ogólnym płaszczyzny. *Równanie ogólne* płaszczyzny w przestrzeni ma postać

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{7.17}$$

gdzie a, b, c, d są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Zauważmy, że równanie (7.17) można zapisać w postaci

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle + d = 0. \tag{7.18}$$

Ponadto, wektor $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}\right)$ jest prostopadły do płaszczyzny $ax + by + cz + d = 0$. Istotnie, niech X_1 oraz X_2 spełniają równanie $ax + by + cz = d$. Wówczas

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, X_1 \right\rangle + d = 0,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, X_2 \right\rangle + d = 0.$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, X_1 \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, X_2 \right\rangle = 0,$$

a korzystając z dwuliniowości iloczynu skalarnego mamy

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, X_1 - X_2 \right\rangle = 0.$$

Zatem (z faktu 1.11) mamy, że $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \perp X_1 - X_2$.

Co więcej, płaszczyzna $ax + by + cz = d$ jest rozpinana przez pewne dwa niewspółliniowe wektory U oraz V, więc wektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ jest prostopadły do wektorów U i V. A zatem, zgodnie z faktem 7.5, dla pewnego $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$ mamy

$$U \times V = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Przykład 7.11. Rozważmy płaszczyznę daną równaniem parametrycznym

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Znajdziemy jej równanie ogólne. Niech $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ będzie wektorem prostopadłym do płaszczyzny. Wówczas dla pewnego $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$

$$\alpha\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right).$$

Przyjmując $\alpha = 2$ otrzymujemy $a = 1$, $b = -2$ oraz $c = -1$, więc równanie ogólne płaszczyzny ma postać

$$x - 2y - z + d = 0.$$

Pozostaje jedynie wyznaczyć d. Zauważmy, że punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ należy do płaszczyzny, więc spełnia jej równanie ogólne, tj.

$$1 - 2 \cdot 2 - 3 + d = 0,$$

skąd $d = 6$, czyli równanie ogólne płaszczyzny ma postać

$$x - 2y - z + 6 = 0. \qquad \blacksquare$$

Przykład 7.12. Znajdziemy równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, równoległej do prostej danej równaniem

$$\tfrac{x-1}{3} = \tfrac{y+1}{2} = \tfrac{z-3}{-5}$$

oraz prostopadłej do płaszczyzny o równaniu

$$3x + y - z = 0.$$

Niech wektor N będzie prostopadły do szukanej płaszczyzny. Wówczas $N \perp \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $N \perp \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, więc dla pewnego $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$

$$\alpha N = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{smallmatrix}\right).$$

Przyjmując $\alpha = 3$ otrzymujemy $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, więc równanie ogólne szukanej płaszczyzny ma postać

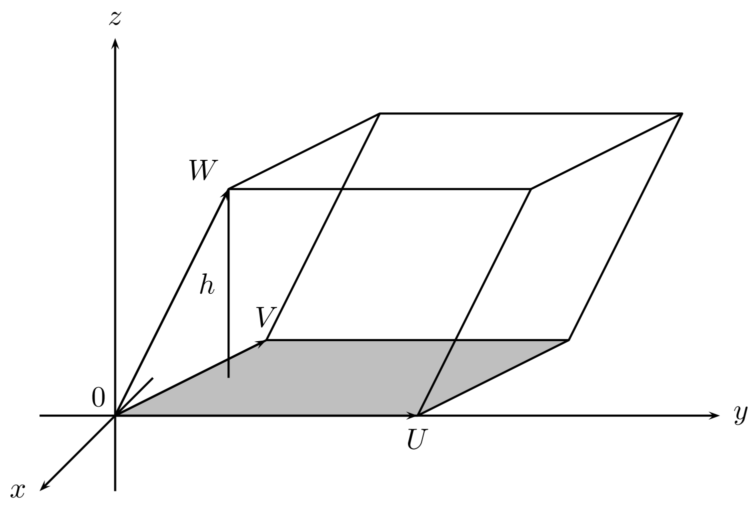
$$x - 4y - z + d = 0.$$

Skoro punkt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ należy do płaszczyzny, więc $d = -4$, czyli szukana płaszczyna jest dana równaniem

$$x - 4y - z - 4 = 0. \qquad \blacksquare$$

7.5. Wyznacznik trzech wektorów

Rozważmy *równoległościan* rozpięty przez wektory $U = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $V = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $W = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$, tzn. zbiór $\{X \in \mathbb{R}^3 : \exists r, s, t \in [0,1] \quad X = rU + sV + tW\}$. Jest jasne, że podstawą równoległościanu jest równoległobok rozpięty przez wektory U i V, tzn. zbiór $\{X \in \mathbb{R}^3 : \exists r, s \in [0,1] \quad X = rU + sV\}$. Objętość



Rysunek 5

równoległościanu jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości h opuszczonej na tę podstawę. Przypomnijmy, że pole równoległoboku rozpiętego przez wektory U i V jest równe $\|U \times V\|$. Wysokość równoległościanu jest równa odległości punktu W od płaszczyzny rozpinanej przez wektory U i V

(por. rys. 5), czyli $h = \|P_{U\times V}(W)\|$. Stąd

$$h\,\|U\times V\| = \|P_{U\times V}(W)\|\,\|U\times V\| = \left\|\frac{\langle W, U\times V\rangle}{\|U\times V\|^2}(U\times V)\right\|\|U\times V\| =$$
$$= \frac{|\langle W, U\times V\rangle|}{\|U\times V\|}\|U\times V\| = |\langle W, U\times V\rangle|\,.$$

Powyższe rozumowanie prowadzi do następującej definicji *iloczynu mieszanego* trzech wektorów.

Definicja 7.13. *Iloczynem mieszanym* wektorów U, V i W nazywamy liczbę $\langle U\times V, W\rangle$.

A zatem objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory U, V i W wynosi $|\langle U\times V, W\rangle|$.

W podrozdziale 1.4 pokazaliśmy, iż pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $U, V\in\mathbb{R}^2$ jest równe z dokładnością do znaku wyznacznikowi pary wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Ponieważ równoległościan w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest analogonem równoległoboku w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, więc w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjąć można następującą definicję *wyznacznika* trzech wektorów.

Definicja 7.14. *Wyznacznikiem* trzech wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{smallmatrix}\right)$, $V = \left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{smallmatrix}\right)$ i $W = \left(\begin{smallmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{smallmatrix}\right)$ nazywamy liczbę $\det(U,V,W) = \langle U\times V, W\rangle = w_1\left|\begin{smallmatrix}u_2 & v_2\\u_3 & v_3\end{smallmatrix}\right| - w_2\left|\begin{smallmatrix}u_1 & v_1\\u_3 & v_3\end{smallmatrix}\right| + w_3\left|\begin{smallmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{smallmatrix}\right|$.

Wyznacznik trzech wektorów $U = \left(\begin{smallmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{smallmatrix}\right)$, $V = \left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{smallmatrix}\right)$ i $W = \left(\begin{smallmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{smallmatrix}\right)$ oznaczać będziemy analogicznie jak wyznacznik pary wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, tzn.

$$\det(U,V,W) = \begin{vmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}. \tag{7.20}$$

Stwierdzenie 7.15. *Dla dowolnych wektorów U, V, W, Z oraz liczb rzeczywistych α, β zachodzą następujące własności*

(1) *trójliniowość wyznacznika*
   (a) $\det(\alpha U + \beta V, W, Z) = \alpha\det(U,W,Z) + \beta\det(V,W,Z)$
   (liniowość względem 1. zmiennej)
   (b) $\det(U, \alpha V + \beta W, Z) = \alpha\det(U,V,Z) + \beta\det(U,W,Z)$
   (liniowość względem 2. zmiennej)
   (c) $\det(U, V, \alpha W + \beta Z) = \alpha\det(U,V,W) + \beta\det(U,V,Z)$
   (liniowość względem 3. zmiennej)

(2) $\det(U,V,W) = -\det(U,W,V) = \det(V,W,U) =$
   $= -\det(W,V,U) = \det(W,U,V) = -\det(V,U,W)$
   (antysymetryczność)

Ze stwierdzenia 7.15 wynika następujący

Wniosek 7.16. Dla dowolnych wektorów U i V oraz dowolnych liczb rzeczywistych α, β zachodzi równość

$$\det(U, V, \alpha U + \beta V) = 0.$$

Definicja 7.17. Wektory U, V i W nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych λ, μ, ν z warunku $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ wynika, że $\lambda = \mu = \nu = 0$. W przeciwnym wypadku wektory U, V i W nazywamy *liniowo zależnymi.*

Twierdzenie 7.18. *Wektory U, V i W są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(U, V, W) \neq 0$.

Dowód. Załóżmy, że wektory U, V i W są liniowo zależne. Oznacza to, że istnieją liczby λ, μ i ν, z których co najmniej jedna jest różna od zera i dla których $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$. Możemy bez zmniejszania ogólności założyć, że to ν jest różne od zera. Oznacza to, że $W = \frac{-\lambda}{\nu} U + \frac{-\mu}{\nu} V$ a więc $\det(U, V, W) = \det(U, V, \alpha U + \beta V) = 0$

Z drugiej strony, jeśli wyznacznik trzech wektorów jest zerowy, to objętość generowanego przez nie równoległościanu wynosi zero. Oznacza to, że pole podstawy lub wysokość wynosi zero. Jeśli wysokość wynosi zero, wektor W jest zerowy a zatem przy λ i μ równych zero, ν może mieć dowolną niezerową wartość i $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$. Jeśli pole podstawy wynosi zero, to wektory, które ją rozpinają leżą w jednej linii a więc jeden z nich musi być skalarną krotnością drugiego. Przyjmując bez straty ogólności, że $U = \mu V$ dostajemy $U - \mu V + 0W = 0$ a zatem U, V i W są liniowo zależne. ■

Fakt 7.19. *Jeśli wektory $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne, to dla dowolnego $Y \in \mathbb{R}^3$ istnieją jedyne liczby rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dla których*

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$$

Liczby λ_1, λ_2 i λ_3 nazywamy współrzędnymi wektora Y w bazie X_1, X_2, X_3.

Dowód. Niech π oznacza płaszczyznę rozpinaną przez X_1 i X_2, tzn. $\pi = \{sX_1 + tX_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$. Prosta l o równaniu parametrycznym $X = Y + vX_3$ nie jest równoległa do płaszczyzny π, ponieważ jej wektor kierunkowy X_3 nie jest kombinacją liniową X_1 i X_2. W takim razie l i π przecinają się w pewnym punkcie $Y + u_0 X_3 = s_0 X_1 + t_0 X_2$ skąd możemy wnioskować, że $Y = s_0 X_1 + t_0 X_2 - u_o X_3$.

Współrzędne wektora Y są jedyne bo gdyby $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$, to $0 = (\alpha_1 - \beta_1)X_1 + (\alpha_2 - \beta_2)X_2 + (\alpha_3 - \beta_3)X_3$ a ponieważ X_1, X_2 i X_3 są liniowo niezależne, liczby α_i i β_i musiałyby być równe dla $i = 1, 2, 3$.

■

7.6. Układy równań liniowych

W tym podrozdziale zajmiemy się *układami trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi*, tzn. układami równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3, \end{cases} \tag{7.21}$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są niewiadomymi, zaś a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, są współczynnikami rzeczywistymi, przy czym $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 > 0$ dla $i = 1, 2, 3$.

Zauważmy, że każde z równań układu (7.21) jest równaniem ogólnym płaszczyzny. Zatem rozwiązaniami układu (7.21) są punkty wspólne trzech płaszczyzn w przestrzeni.

Wprowadzając oznaczenia

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

układ (7.21) można zapisać w postaci

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = Y. \tag{7.22}$$

Nietrudno zauważyć, iż rozwiązaniami układu (7.21) są współczynniki przedstawień wektora Y w postaci kombinacji liniowej wektorów A_1, A_2 i A_3. Jeśli wektory A_1, A_2 oraz A_3 są liniowo niezależne, to takie przedstawienie jest jedyne, więc układ (7.21) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Z powyższych rozważań wynika następujące

Twierdzenie 7.20. *Jeśli wektory A_1, A_2 i A_3 są liniowo niezależne, to układ* (7.21) *ma dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. jeśli* $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, *to układ* (7.21) *ma dokładnie jedno rozwiązanie), dane wzorami Cramera*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(Y, A_2, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \\ x_2 &= \frac{\det(A_1, Y, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \\ x_3 &= \frac{\det(A_1, A_2, Y)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

Dowód. Niech wektory A_1, A_2 i A_3 będą liniowo niezależne, czyli niech $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$. Ponieważ wektory A_1, A_2 i A_3 są liniowo niezależne, istnieje dokładnie jedno przedstawienie wektora Y w postaci kombinacji liniowej wektorów A_1, A_2 oraz A_3. Wówczas $Y = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ jedynym rozwiązaniem układu (7.21).

Wyliczymy teraz wartości współczynników x_1, x_2 i x_3 w (7.22), czyli znajdziemy rozwiązanie układu (7.21). Szukamy zatem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takich, że $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = Y$. Wówczas

$$\det(x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3, A_2, A_3) = \det(Y, A_2, A_3).$$

Korzystając z dwuliniowości wyznacznika mamy

$$x_1 \det(A_1, A_2, A_3) + x_2 \det(A_2, A_2, A_3) + \\ + x_3 \det(A_3, A_2, A_3) = \det(Y, A_2, A_3),$$

a ponieważ $\det(A_2, A_2, A_3) = 0$ oraz $\det(A_3, A_2, A_3) = 0$, więc

$$x_1 \det(A_1, A_2, A_3) = \det(Y, A_2, A_3),$$

skąd

$$x_1 = \frac{\det(Y, A_2, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}.$$

Analogicznie otrzymujemy równości

$$x_2 = \frac{\det(A_1, Y, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}$$

oraz

$$x_3 = \frac{\det(A_1, A_2, Y)}{\det(A_1, A_2, A_3)}. \qquad \blacksquare$$

Uwaga 7.21. Wyznacznik $\det(A_1, A_2, A_3)$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu (7.21) i oznaczamy symbolem W. Wyznaczniki $\det(Y, A_2, A_3)$, $\det(A_1, Y, A_3)$ oraz $\det(A_1, A_2, Y)$ oznaczamy odpowiednio przez W_{x_1}, W_{x_2} i W_{x_3}.

W przypadku, gdy $W = \det(A_1, A_2, A_3) = 0$, to układ (7.21) może mieć nieskończenie wiele rozwiązań bądź nie mieć ich wcale. Wówczas układ (7.21) nazywamy odpowiednio układem *nieoznaczonym* albo *sprzecznym.* Interpretacją graficzną układu nieoznaczonego jest prosta lub trzy pokrywające się płaszczyzny, zaś układu sprzecznego — trzy płaszczyzny, z których co najmniej dwie są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Rozdział 8

Przekształcenia liniowe $\mathbb{R}^3$ i macierze

8.1. Wstęp

Z przekształceniami liniowymi zetknęliśmy się już w rozdziale2. Jak już wiadomo, każde liniowe przekształcenie płaszczyzny można utożsamiać z pewną macierzą kwadratową stopnia 2. Podobnie jest w przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 8.1. *Przekształceniem przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ nazywamy dowolną funkcję $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, czyli odwzorowanie $\mathbb{R}^3 \ni X \mapsto F(X) \in \mathbb{R}^3$.

Definicja 8.2. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest *addytywne*, jeśli

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3 \quad F(X+Y) = F(X) + F(Y).$$

Definicja 8.3. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest *jednorodne*, jeśli

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall X \in \mathbb{R}^3 \quad F(\alpha X) = \alpha F(X).$$

Definicja 8.4. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest *liniowe*, jeśli jest *addytywne* i *jednorodne*, tzn. jeśli

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^3 \quad F(\alpha X + \beta Y) = \alpha F(X) + \beta F(Y).$$

8.2. Macierz przekształcenia liniowego

Definicja 8.5. *Macierzą kwadratową stopnia* 3 (*macierzą rozmiaru* 3×3) nazywamy uporządkowany zbiór liczb rzeczywistych a_{ij}, gdzie $i, j = 1, 2, 3$, postaci

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

lub w formie skróconej

$$[a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Przestrzeń macierzy kwadratowych stopnia 3 o wyrazach rzeczywistych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Dla danych macierzy $A, B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ określamy działania *dodawania* oraz *mnożenia* odpowiednio wzorami

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]\,, \tag{8.1}$$

$$AB = [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}\right]. \tag{8.2}$$

Mnożenie przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definujemy wzorem

$$tA = t\,[a_{ij}] = [ta_{ij}]\,. \tag{8.3}$$

Dla wektora $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ definiujemy *działanie macierzy na wektor* następująco

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Wektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ możemy traktować jak macierz prostokątną rozmiaru 3×1.Wtedy działanie macierzy na wektor jest po prostu szczególnym przypadkiem *mnożenia* dwóch macierzy.

Fakt 8.6. *Niech* $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie liniowe. Wówczas istnieje jedyna macierz kwadratowa stopnia* 3*, odpowiadająca przekształceniu* F*.*

Dowód. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ będzie dowolnym wektorem. Wówczas

$$F(X) = F(x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3) = x_1F(E_1) + x_2F(E_2) + x_3F(E_3) =$$
$$= \begin{pmatrix} F(E_1) & F(E_2) & F(E_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

a ponieważ F jest jednoznacznie wyznaczone przez określenie wartości, jakie przyjmuje na dowolnej trójce wektorów liniowo niezależnych, więc macierz $\left(\begin{smallmatrix} F(E_1) & F(E_2) & F(E_3) \end{smallmatrix}\right)$ jest jedyną macierzą odpowiadającą przekształceniu liniowemu F. ■

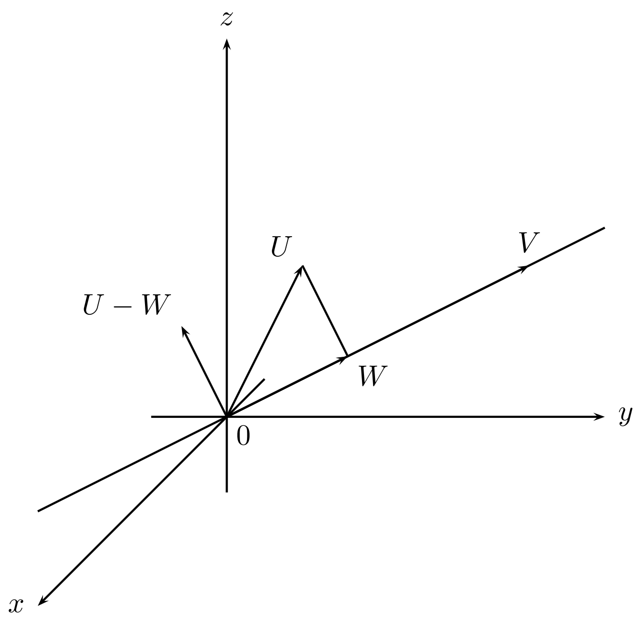
8.3. Przykłady przekształceń

Szczególnym przykładem liniowego przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest *przekształcenie tożsamościowe* (*identycznościowe*) $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci $\mathrm{Id}(X) = X$. Macierzą tego przekształcenia jest macierz

$$\mathbb{I} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

którą nazywamy *macierzą jednostkową*.

Definicja 8.7. *Rzutem prostopadłym* wektora U na prostą w przestrzeni, rozpinaną przez wektor V nazywamy taki wektor W leżący na tej prostej, że $U - W \perp V$ (patrz rys. 1). Wektor W oznaczamy przez $P_V(U)$.

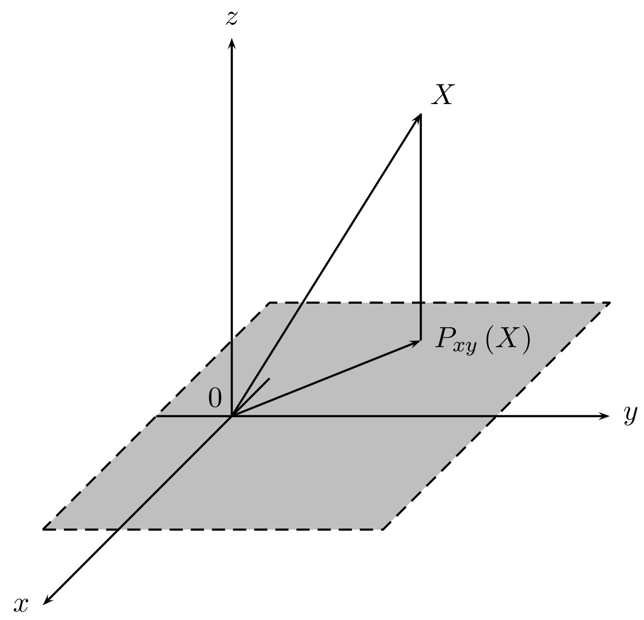


Rysunek 1

Przykład 8.8. Rozważmy rzut P_{xy} na płaszczyznę rozpinaną przez wektory E_1 i E_2. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ oraz $P_{xy}(X) = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$.
Jest jasne, że $x' = x$, $y' = y$ oraz $z' = 0$ (por. rys. 2), czyli

$$P_{xy}\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right),$$

więc P_{xy} jest przekształceniem liniowym o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. ■



Rysunek 2

Podobnie, jak w przykładzie 8.8, rzut P_{yz} na płaszczyznę rozpinaną przez wektory E_2 i E_3 oraz rzut P_{xz} na płaszczyznę rozpinaną przez wektory E_1 i E_3 są przekształceniami liniowymi o macierzach

$$\mathrm{m}\left(P_{yz}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

oraz

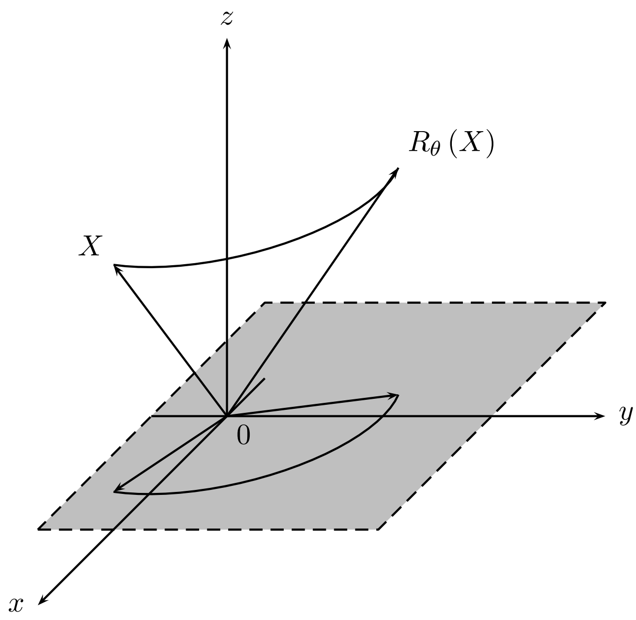
$$\mathrm{m}\left(P_{xz}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Przykład 8.9. Rozważmy obrót $R_{z,\theta}$ o kąt $\theta\in\mathbb{R}$ w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory E_1 i E_2 (wokół prostej rozpinanej przez wektor E_3). Niech $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ oraz $R_{z,\theta}(X)=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Zauważmy najpierw, że $z'=z$, ponieważ obrót zachodzi w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory E_1 i E_2 (por. rys. 3). Rozważmy zatem rzut wektora $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ na płaszczyznę rozpinaną przez wektory E_1 i E_2, tj. wektor $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$. Wówczas

$$R_{z,\theta}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\\0\end{pmatrix},$$

a zatem

$$R_{z,\theta}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\\z\end{pmatrix},$$



Rysunek 3

więc $R_{z,\theta}$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Podobnie, jak w przykładzie 8.9, obrót $R_{x,\theta}$ o kąt $\theta \in \mathbb{R}$ w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory E_2 i E_3 (wokół prostej rozpinanej przez wektor E_1) oraz obrót $R_{y,\theta}$ o kąt $\theta \in \mathbb{R}$ w płaszczyźnie rozpinanej przez wektory E_1 i E_3 (wokół prostej rozpinanej przez wektor E_2) są przekształceniami liniowymi o macierzach

$$\mathrm{m}\left(R_{x,\theta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

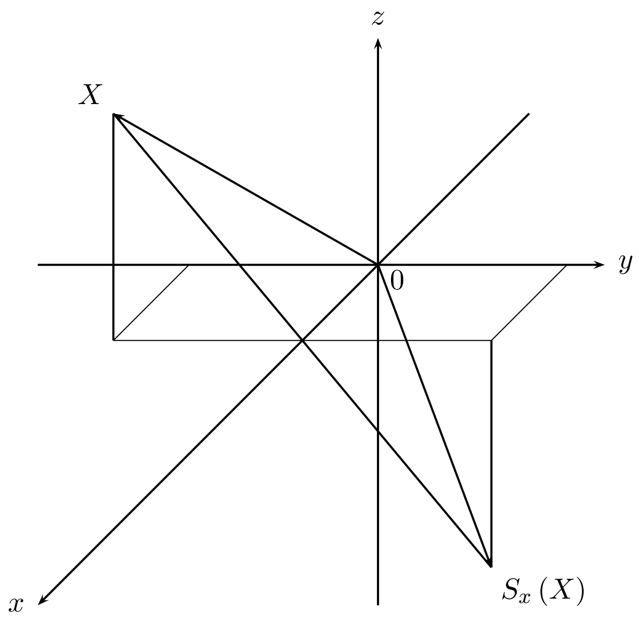
oraz

$$\mathrm{m}\left(R_{y,\theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Przykład 8.10. Rozważmy symetrię S_x względem prostej rozpinanej przez wektor E_1. Niech $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ oraz $S_x(X) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
Jest jasne, że $x' = x$, $y' = -y$ oraz $z' = -z$ (por. rys. 4), czyli

$$S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix},$$

więc S_x jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ■



Rysunek 4

Podobnie, jak w przykładzie 8.10, symetria S_y względem prostej rozpinanej przez wektor E_2 oraz symetria S_z względem prostej rozpinanej przez wektor E_3 są przekształceniami liniowymi o macierzach

$$\mathrm{m}(S_y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

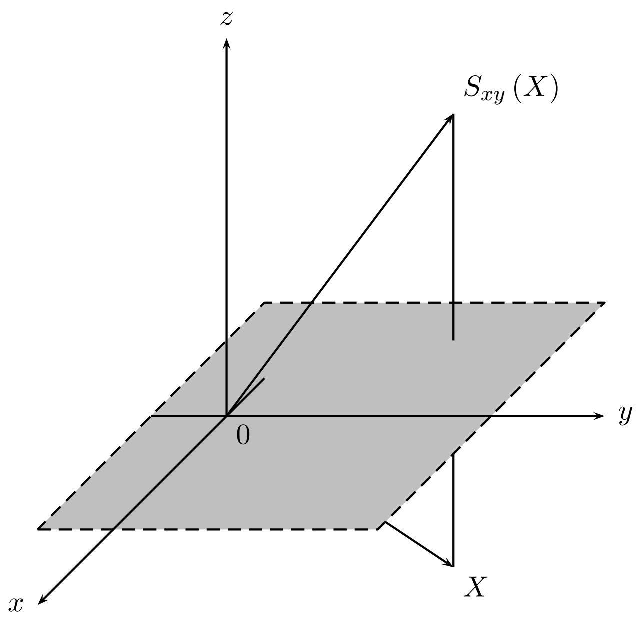
oraz

$$\mathrm{m}(S_z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 8.11. Rozważmy symetrię S_{xy} względem płaszczyzny rozpinanej przez wektory E_1 i E_2. Niech $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ oraz $S_{xy}(X) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Nietrudno zauważyć, że $x' = x$, $y' = y$ oraz $z' = -z$ (por. rys. 5), czyli

$$S_{xy}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix},$$

więc S_{xy} jest przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ■



Rysunek 5

Podobnie, jak w przykładzie 8.11, symetria S_{yz} względem płaszczyzny rozpinanej przez wektory E_2 i E_3 oraz symetria S_{xz} względem płaszczyzny rozpinanej przez wektory E_1 i E_3 są przekształceniami liniowymi o macierzach

$$\mathrm{m}\,(S_{yz}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathrm{m}\,(S_{xz}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Jądro i obraz

Definicja 8.12. *Jądrem* przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór $\ker F = \{X \in \mathbb{R}^3 : F(X) = 0\}$.

Zauważmy przy tym, że jądro przekształcenia liniowego F jest przeciwobrazem zbioru $\{0\}$, tzn. $\ker F = F^{-1}(\{0\})$.

Definicja 8.13. *Obrazem* przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór $\operatorname{im} F = \{F(X) : X \in \mathbb{R}^3\}$.

Przykład 8.14. Rozważmy macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ przekształcenia liniowego $F_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Z definicji, jądrem przekształcenia F_A jest zbiór $\ker F_A = \{X \in \mathbb{R}^3 : F_A(X) = 0\}$. Jeśli $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jądro przekształcenia F_A

możemy interpretować jako zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 5y + 8z = 0, \\ \quad\quad y + z = 0, \\ \quad\ x + 3z = 0, \end{cases}$$

skąd $x = -3z$ oraz $y = -z$. Zatem $\ker F = \left\{t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$, czyli jądrem przekształcenia F_A jest prosta rozpinana przez wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Znajdziemy obraz przekształcenia F_A. Niech $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{im} F_A &= \left\{F_A(X) : X \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{F_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) : x, y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \{xF_A(E_1) + yF_A(E_2) + zF_A(E_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\left(3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) : x, y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{(x + 3z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (y + z)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}\right\}, \end{aligned}$$

zatem $\operatorname{im} F_A = \left\{s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R}\right\}$, czyli obrazem przekształcenia F_A jest płaszczyzna rozpinana przez wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ■

8.5. Wyznacznik macierzy

W podrozdziale 6.5 zdefiniowaliśmy pojęcie wyznacznika trzech wektorów. Jak wiadomo, kolumny macierzy $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ można utożsamić z wektorami $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$. Nic zatem nie stoi na przeszkodzie, aby zdefiniować pojęcie *wyznacznika macierzy.*

Definicja 8.15. *Wyznacznikiem* macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ nazywamy liczbę

$$\det A \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad (j = 1, 2, 3),$$

gdzie $A_{ij} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ jest macierzą powstałą z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Zauważmy, że prawa strona równości zależy od j. Okazuje się jednak, że bez względu na to czy za j weźmiemy 1, 2 czy 3, wynik będzie taki sam.

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ oznaczać będziemy analogicznie jak wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 2, tzn.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{8.6}$$

Wprowadzając oznaczenie $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ mamy

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} C_{ij}. \tag{8.7}$$

Liczbę C_{ij} nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* lub *kofaktorem* elementu a_{ij} macierzy A.

8.6. Odwracalność przekształceń

Przedstawimy teraz pokrótce związek między macierzami a układami równań liniowych z trzema niewiadomymi. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie daną macierzą oraz $X, Y \in \mathbb{R}^3$. Dla ustalonych $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ niech $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$. Niech $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas równaniu macierzowemu

$$AX = Y \tag{8.8}$$

odpowiada układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3, \end{cases} \tag{8.9}$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są niewiadomymi.

Jeśli $\det A \neq 0$, to układ (8.9) ma jedyne rozwiązanie. Wówczas wzory (7.23) można zapisać w postaci

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{3} y_i C_{ik} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{8.10}$$

gdzie C_{ik} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} macierzy A.

Twierdzenie 8.16. *Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie daną macierzą przekształcenia liniowego F_A oraz niech $Y \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym wektorem. Wówczas dla $X \in \mathbb{R}^3$ mamy*

(1) *Układ $AX = Y$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in \operatorname{im} F_A$.*

(2) *Jeśli X_0 jest rozwiązaniem układu $AX = Y$, to zbiorem wszystkich jego rozwiązań jest zbiór $\{X_0 + U : U \in \ker F_A\}$.*

Dowód. Punkt (1) jest oczywisty. Udowodnimy jedynie punkt (2).

Niech X_0 będzie rozwiązaniem układu $AX = Y$, tzn. $AX_0 = Y$. Zauważmy, że

$$AX = A((X - X_0) + X_0) = A(X - X_0) + AX_0.$$

Wówczas X jest rozwiązaniem układu $AX = Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest rozwiązaniem układu

$$A(X - X_0) + AX_0 = Y.$$

A zatem, ponieważ $AX_0 = Y$, X jest rozwiązaniem układu $AX = Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A(X - X_0) = 0,$$

więc $X - X_0 \in \ker F_A$. ■

Przykład 8.17. Rozważmy układ równań

$$AX = Y,$$

gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego F_A oraz $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ jest dany. Zauważmy, że $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, więc $\det A = 0$. Zgodnie z twierdzeniem 8.16 powyższy układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \in \operatorname{im} F_A$. Niech $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} F_A &= \left\{ F_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ (x_1 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}$$

skąd $\operatorname{im} F_A = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$, czyli rozważany układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $y_1 - y_2 - y_3 = 0$.

Jądrem przekształcenia F_A jest zbiór rozwiązań układu

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

skąd $x_1 = -x_3$ oraz $x_2 = -x_3$, więc $\ker F_A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Niech $Y = \left(\begin{smallmatrix}4\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$. Zauważmy, iż jednym z rozwiązań układu

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

jest wektor $X_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$. Zatem zgodnie z twierdzeniem 8.16, zbiorem wszystkich rozwiązań powyższego układu jest zbiór $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$, czyli prosta mająca kierunek wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ i przechodząca przez punkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$. ■

Definicja 8.18. Macierz A jest *odwracalna*, jeśli dla każdego $Y \in \mathbb{R}^3$ istnieje jedyne $X \in \mathbb{R}^3$ takie, że $AX = Y$ (tzn. dla dowolnego $Y \in \mathbb{R}^3$ układ równań $AX = Y$ ma dokładnie jedno rozwiązanie).

Jest jasne, że jeśli $\det A \neq 0$, to macierz A jest odwracalna. Istnieje wówczas macierz odwrotna do A, którą teraz wyliczymy. Zauważmy, że na mocy równości (8.10)

$$A^{-1}Y = \frac{1}{\det A}\,[C_{ki}]\,Y,$$

skąd

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,[C_{ki}]\,,$$

tzn.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Definicja 8.19. *Macierzą dołączoną* do macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ nazywamy macierz

$$\operatorname{adj} A \overset{\text{df}}{=} [C_{ij}]^{\mathsf{T}} = [C_{ji}]\,,$$

gdzie C_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A.

Równość (8.11) można zatem zapisać w postaci

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A. \tag{8.12}$$

Twierdzenie 8.20. *Niech $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) *F jest odwracalne.*

(2) $\det F \neq 0$.

(3) $\ker F = \{0\}$.

(4) *F jest injekcją.*

(5) $\operatorname{im} F = \mathbb{R}^3$.

(6) *F jest surjekcją.*

Dowód.
(1) $\Longrightarrow$ (6)

Skoro F jest odwracalne, to dla każdego $Y \in \mathbb{R}^3$ istnieje jedyne $X \in \mathbb{R}^3$ takie, że $F(X) = Y$. Zatem w szczególności F jest surjekcją.

(6) $\Longleftrightarrow$ (5)

To tautologia!

(5) $\Longrightarrow$ (4)

Niech $\operatorname{im} F = \mathbb{R}^3$. Przypuśćmy, że F nie jest injekcją. Wówczas dla pewnych $X, X' \in \mathbb{R}^3$, $X \neq X'$ zachodzi $F(X) = F(X')$, tzn. $F(X) - F(X') = 0$. Z liniowości F otrzymujemy, że $F(X - X') = 0$. Połóżmy $Y = X - X'$. Oczywiście $Y \neq 0$. Niech $Y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas

$$F(Y) = y_1 F(E_1) + y_2 F(E_2) + y_3 F(E_3) = 0,$$

więc wektory $F(E_1)$, $F(E_2)$ oraz $F(E_3)$ są liniowo zależne. A zatem jeden z wektorów $F(E_1), F(E_2), F(E_3)$ jest kombinacją liniową pozostałych. Bez straty ogólności przyjmijmy więc, że dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$F(E_3) = \alpha F(E_1) + \beta F(E_2).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\operatorname{im} F &= \left\{ F\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\right) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \{x_1 F(E_1) + x_2 F(E_2) + x_3 F(E_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_1 F(E_1) + x_2 F(E_2) + x_3(\alpha F(E_1) + \beta F(E_2)) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1 + \alpha x_3) F(E_1) + (x_2 + \beta x_3) F(E_2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

zatem $\operatorname{im} F = \{sF(E_1) + tF(E_2) : s, t \in \mathbb{R}\}$, czyli obrazem przekształcenia F jest płaszczyzna (być może zdegenerowana) rozpinana przez wektory $F(E_1)$ oraz $F(E_2)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\operatorname{im} F = \mathbb{R}^3$.

(4) $\Longrightarrow$ (3)

Niech F będzie injekcją. Przypuśćmy, że $\ker F \neq \{0\}$, tzn. $F(X) = 0$ dla pewnego $X \neq 0$. Z liniowości F w szczególności wynika, że $F(0) = 0$. A zatem $F(X) = F(0)$ dla $X \neq 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że F jest injekcją.

(3) $\Longrightarrow$ (2)

Niech $\ker F = \{0\}$. Przypuśćmy, że $\det F = 0$, tzn. $\det(\mathrm{m}(F)) = 0$. Ponieważ $\mathrm{m}(F) = (F(E_1), F(E_2), F(E_3))$, więc wektory $F(E_1)$, $F(E_2)$ oraz $F(E_3)$ są liniowo zależne, tzn. dla pewnych $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ takich, że $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ mamy

$$x_1 F(E_1) + x_2 F(E_2) + x_3 F(E_3) = 0,$$

skąd $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 0$, więc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker F$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\ker F = \{0\}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1)

Załóżmy, że $\det F \neq 0$, tzn. $\det(\mathrm{m}(F)) \neq 0$. Wówczas dla dowolnego $Y \in \mathbb{R}^3$ układ $\mathrm{m}(F)\, X = Y$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, więc przekształcenie F jest odwracalne. ■

8.7. Diagonalizacja i rozkład Jordana

Definicja 8.21. Niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^3$ nazywamy *wektorem własnym* macierzy A (przekształcenia liniowego F), jeśli istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $AU = \lambda U$ ($F(U) = \lambda U$ odpowiednio).

Definicja 8.22. Jeśli dla $\lambda \in \mathbb{R}$ istnieje niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^3$ taki, że $AU = \lambda U$ ($F(U) = \lambda U$), to λ nazywamy wartością własną macierzy A (odpowiednio: przekształcenia liniowego F).

Fakt 8.23. *Jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ są różnymi wartościami własnymi macierzy A, zaś $U_1, U_2, U_3 \in \mathbb{R}^3$ — odpowiadającymi im wektorami własnymi, to U_1, U_2 i U_3 są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy A, zaś $U_1, U_2, U_3 \in \mathbb{R}^3$ — odpowiadającymi im wektorami własnymi.

Zauważmy najpierw, że wektory U_1 i U_2 nie są współliniowe, tzn. są liniowo niezależne. Istotnie, gdyby U_1 oraz U_2 były współliniowe, to istniałaby $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $U_1 = \alpha U_2$ lub istniałaby $\beta \in \mathbb{R}$ taka, że $U_2 = \beta U_1$. Przypuśćmy zatem, że np. $U_1 = \alpha U_2$. Wówczas

$$\lambda_1 U_1 = AU_1 = A(\alpha U_2) = \alpha A U_2 = \alpha \lambda_2 U_2 = \lambda_2(\alpha U_2) = \lambda_2 U_1,$$

skąd $(\lambda_1 - \lambda_2)U_1 = 0$, więc $\lambda_1 = \lambda_2$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podobnie żadne dwa spośród trzech wektorów U_1, U_2 i U_3 nie są współliniowe. Pokażemy teraz, że cała trójka jest liniowo niezależna. Przypuśćmy, że wektory U_1, U_2 i U_3 są liniowo zależne. Wówczas dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ spełniających $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$, zachodzi równość

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 = 0.$$

A zatem jeden z wektorów U_1, U_2 i U_3 jest kombinacją liniową pozostałych. Bez straty ogólności przyjmijmy, że dla pewnych $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$U_3 = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2.$$

Wówczas

$$AU_3 = A(\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2) = \beta_1 AU_1 + \beta_2 AU_2 = \beta_1 \lambda_1 U_1 + \beta_2 \lambda_2 U_2.$$

Z drugiej strony

$$AU_3 = \lambda_3 U_3 = \beta_1 \lambda_3 U_1 + \beta_2 \lambda_3 U_2.$$

Stąd

$$\beta_1 \lambda_1 U_1 + \beta_2 \lambda_2 U_2 = \beta_1 \lambda_3 U_1 + \beta_2 \lambda_3 U_2,$$

czyli

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_3)U_1 + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_3)U_2 = 0.$$

Ponieważ wektory U_1 i U_2 są liniowo niezależne a $\lambda_1 \neq \lambda_3$ oraz $\lambda_2 \neq \lambda_3$, więc z powyższej równości wynika, że $\beta_1 = \beta_2 = 0$, skąd $U_3 = 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Definicja 8.24. *Wielomianem charakterystycznym* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (przekształcenia liniowego F) nazywamy wielomian $\chi_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (odpowiednio: $\chi_F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) dany wzorem

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{df}}{=} \det(A - x\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{pmatrix}$$

(odpowiednio: $\chi_F(x) \stackrel{\text{df}}{=} \det(F - x\mathrm{Id})$).

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej macierzy kwadratowej stopnia 3 zachodzi równość

$$\chi_A(x) = -x^3 + \operatorname{tr} A \cdot x^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{adj} A) \cdot x + \det A, \tag{8.13}$$

gdzie $\operatorname{adj} A$ jest macierzą dołączoną do macierzy kwadratowej A.

Fakt 8.25. *Liczba rzeczywista λ jest wartością własną macierzy A (przekształcenia liniowego F) wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest pierwiatkiem χ_A (odpowiednio: χ_F).*

Dowód.
($\Longrightarrow$)

Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną przekształcenia liniowego F. Wówczas (na mocy definicji 8.22) istnieje niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^3$ taki, że $F(U) = \lambda U$, tzn.

$$(F - \lambda\mathrm{Id})(U) = 0,$$

skąd

$$\ker(F - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}\,,$$

co na mocy twierdzenia 8.20 jest równoważne warunkowi

$$\det(F - \lambda\mathrm{Id}) = 0,$$

tzn. $\chi_F(\lambda) = 0$, czyli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego przekształcenia liniowego F.

$(\Longleftarrow)$

Załóżmy, że $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego przekształcenia liniowego F, tzn $\chi_F(\lambda) = 0$. Czyli zachodzi równość

$$\det(F - \lambda\mathrm{Id}) = 0,$$

co na mocy twierdzenia 8.20 jest równoważne warunkowi

$$\ker(F - \lambda\mathrm{Id}) \neq \{0\}\,.$$

Istnieje zatem niezerowy wektor $U \in \mathbb{R}^3$ taki, że

$$(F - \lambda\mathrm{Id})(U) = 0,$$

tzn.

$$F(U) = \lambda U,$$

czyli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną przekształcenia liniowego F. ■

Zauważmy, iż z faktu 8.25 wynika w szczególności, że macierz A rozmiaru 3×3 ma co najwyżej trzy wartości własne, bo $\deg \chi_A = 3$. Co więcej, z wniosku 6.16 wynika poniższa

Uwaga 8.26. Macierz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ma zawsze rzeczywistą wartość własną.

Twierdzenie 8.27. *Niech $U_1, U_2, U_3 \in \mathbb{R}^3$ będą liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A, a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ — odpowiadającymi im wartościami własnymi. Wówczas macierz A można przedstawić w postaci $A = PDP^{-1}$, gdzie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ a P jest macierzą, której kolumnami, odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią, są wektory U_1, U_2 oraz U_3, tzn. $P = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix}$.*

Dowód. Analogiczny, jak w przypadku, gdy $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (patrz dowód twierdzenia 4.9). ■

Rozważmy liniowo niezależne wektory $U, V, W \in \mathbb{R}^3$. Wiemy, że dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^3$ można zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów U, V i W, tzn.

$$X = uU + vV + wW, \tag{8.14}$$

gdzie $u, v, w \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathcal{B} = \{U, V, W\}$ jest zatem bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zauważmy, że funkcje

$$\begin{aligned} f_1 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f_1(X) = u;\\ f_2 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f_2(X) = v;\\ f_3 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f_3(X) = w; \end{aligned} \tag{8.15}$$

zadają nowy układ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Współrzędnymi wektora X w bazie $\mathcal{B}$ (w układzie współrzędnych zadanym przez funkcje f_1, f_2 oraz f_3) są, odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią, liczby u, v oraz w, co zapisujemy jako

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

lub, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień,

$$[X] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{8.17}$$

Nawiasy kwadratowe będziemy stosowali celem odróżnienia od standardowego układu współrzędnych (tj. wyznaczonego przez wektory E_1, E_2 i E_3).

Definicja 8.28. *Liniowym układem współrzędnych* w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy funkcje $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $k = 1, 2, 3$, związane z pewnym układem liniowo niezależnych wektorów $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ warunkiem

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \quad X = f_1(X)U + f_2(X)V + f_3(X)W.$$

Fakt 8.29. *Funkcje $f_k \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $k = 1, 2, 3$, zadają liniowy układ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwracalna macierz $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taka, że dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość*

$$\begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} = MX.$$

Dowód.
($\Longrightarrow$)

Załóżmy, że funkcje $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $k = 1,2,3$, zadają liniowy układ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas, zgodnie z definicją 8.28, dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci

$$X = f_1(X)U + f_2(X)V + f_3(X)W,$$

gdzie $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ są pewnymi liniowo niezależnymi wektorami związanymi z funkcjami f_k, $k = 1,2,3$. Powyższą równość można zapisać jako

$$X = P \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix},$$

gdzie $P = \left(\begin{smallmatrix} U & V & W \end{smallmatrix} \right)$. Oczywiście macierz P jest odwracalna, bo wektory U, V oraz W są liniowo niezależne. Kładąc $M = P^{-1}$ mamy tezę.

($\Longleftarrow$)

Odwracamy rozumowanie. ■

Fakt 8.30. *Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \ni B = [b_{ij}]$, zaś $P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ — macierzą odwracalną, której kolumnami, odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią, są liniowo niezależne wektory $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$, tzn. $P = \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{smallmatrix} \right)$. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) $A = PBP^{-1}$.

(2) $F(X_k) = \sum\limits_{i=1}^{3} b_{ik} X_i$ *dla* $k = 1,2,3$.

Dowód.
(2) $\Longrightarrow$ (1)

Załóżmy, że $F(X_k) = \sum\limits_{i=1}^{3} b_{ik} X_i$ dla $k = 1,2,3$. Wówczas

$$AX_k = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \end{pmatrix} \quad (k = 1,2,3),$$

czyli

$$A \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

tzn.

$$AP = PB.$$

skąd

$$A = PBP^{-1}.$$

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Odwracamy rozumowanie. ■

Zauważmy, że warunek (2) faktu 8.30 można zapisać w postaci

$$[F(X_k)] = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{8.18}$$

Wówczas

$$\Big[\Big(F(X_1) \quad F(X_2) \quad F(X_3)\Big)\Big] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{8.19}$$

czyli $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest macierzą przekształcenia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $\mathcal{B} = \{X_1, X_2, X_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Ponadto, skoro $A = PBP^{-1}$ (macierz A jest macierzą przekształcenia F w standardowej bazie $\mathcal{E}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$), to

$$\det A = \det B, \tag{8.20}$$

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B. \tag{8.21}$$

Istotnie, na mocy faktu 2.35 oraz faktu 4.5 mamy odpowiednio

$$\det A = \det PBP^{-1} = \det BP^{-1}P = \det B$$

oraz

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} PBP^{-1} = \operatorname{tr} BP^{-1}P = \operatorname{tr} B.$$

Twierdzenie 8.31. *Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Wówczas istnieje macierz odwracalna P taka, że macierz A można przedstawić w postaci $A = PJP^{-1}$, gdzie $J_1 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$ lub $J_2 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ lub $J_3 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ przy czym dopuszczamy $\lambda = \mu$ i/lub $\mu = \nu$. Stałe λ, μ i ν są wartościami własnymi macierzy A i mogą być zespolone!*

Dowód. Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ i niech F będzie przekształceniem zadanym macierzą A. Ponieważ wielomian charakterystyczny jest stopnia 3, macierz A ma co najmniej jedną rzeczywistą wartość własną λ i odpowiadający jej wektor własny X.

Niech π będzie płaszczyzną prostopadłą do wektora X, wektory Y, Z dowolnymi wektorami rozpinającymi π i niech P_π oznacza rzut prostopadły na płaszczyznę π. Z dwuwymiarowego twierdzenia Jordana przekształcenie $\tilde{F} : \pi \to \pi$ zadane wzorem $\tilde{F}(X) = P_\pi(AX)$ ma w pewnej bazie Y', Z' macierz postaci $\begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$.

A zatem w bazie X, Y', Z' macierz przekształcenia F przyjmuje postać $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$ lub $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$. Liczby μ, ν, a i b oraz współrzędne wektorów Y' i Z' wyrażonych w bazie $\{Y, Z\}$ mogą być liczbami zespolonymi! Pozostaje pokazać, że zawsze możemy pozbyć się z tej macierzy wyrazów a i b umiejętnie zmieniając bazę.

(1) Zajmijmy się najpierw pierwszym przypadkiem. Spróbujmy zmodyfikować trzeci wektor bazowy $Z'' = Z' - cX$. Wtedy

$$FZ'' = FZ' - cFX = bX + Y' + \nu Z' - c\lambda X =$$
$$= \nu(Z' - cX) + \nu cX - c\lambda X + bX + Y' =$$
$$= \nu Z'' + Y' + (b - c(\lambda - \nu))X$$

(a) Jeśli założymy, że $\lambda \neq \nu$ i weźmiemy $c = \frac{b}{\lambda - \nu}$, macierz przekształcenia F w bazie X, Y', Z'' będzie miała postać $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$. Weźmy teraz $Y'' = Y' - dX$. Wtedy

$$FY'' = F(Y' - dX) =$$
$$= FY' - dFX = aX + \nu Y' - d\lambda X =$$
$$= \nu(Y' - dX) + d\nu X - d\lambda X + aX =$$
$$= \nu Y'' + (a - d(\lambda - \nu))X$$

Wystarczy teraz wziąć $d = \frac{a}{\lambda - \nu}$ by w bazie X, Y'', Z'' macierz F miała postać $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$ czyli postać J_2 z twierdzenia.

(b) Sytuacja będzie nieco bardziej skomplikowana gdy założymy, że $\lambda = \nu$. Musimy wtedy wziąć $Z'' = Z' - cY'$. Mamy

$$FZ'' = FZ' - cFY' =$$
$$= bX + Y' + \nu Z' - caX - c\nu Y' =$$
$$= \nu(Z' - cY') + c\nu Y' - c\nu Y' + Y' + bX - caX =$$
$$= \nu Z'' + Y' + (b - ca)X$$

Załóżmy, że $a \neq 0$ i weźmy $c = \frac{b}{a}$. Wtedy macierz przekształcenia F w bazie X, Y', Z'' jest postaci $\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.
Jeśli natomiast $a = 0$, możemy zamienić dwa wektory bazowe i macierz F w bazie X, Z', Y' jest tej samej postaci $\begin{pmatrix} \lambda & b & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.
Są teraz dwie możliwości. Jeśli w ostatniej macierzy $b = 0$, macierz jest postaci J_2 z twierdzenia. Jeśli $b \neq 0$ dzielimy wektor bazowy odpowiadający drugiej kolumnie przez b i w nowej bazie macierz przyjmuje postać J_3.

(2) Teraz zajmijmy się drugim przypadkiem.

(a) Jeżeli $\lambda \neq \nu$, weźmy $Z'' = Z' - cX$. Wtedy

$$\begin{aligned} FZ'' &= FZ' - cFX = bX + \nu Z' - c\lambda X = \\ &= \nu(Z' - cX) + \nu cX - c\lambda X + bX = \\ &= \nu Z'' + (b - c(\lambda - \nu))X \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy $c = \frac{b}{\lambda - \nu}$, macierz przekształcenia F w bazie X, Y', Z'' będzie miała postać $\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$. Jeśli $\lambda \neq \mu$, biorąc $Y'' = Y' - \frac{a}{\lambda - \mu} X$ dostaniemy macierz postaci J_1. Jeśli $\lambda = \mu$, mamy dwie możliwości. Albo $a = 0$ i nie musimy nic robić, albo $a \neq 0$ i biorąc $Y'' = \frac{Y'}{a}$ i zmieniając kolejność elementów bazy dostaniemy w bazie Z'', X, Y'' macierz postaci J_2 z twierdzenia.

(b) Jeśli natomiast $\lambda = \nu$, biorąc $Z'' = Z' - cY'$ mamy

$$\begin{aligned} FZ'' &= FZ' - cFY' = \\ &= bX + \nu Z' - caX - c\nu Y' = \\ &= \nu(Z' - cY') + c\nu Y' - c\nu Y' + bX - caX = \\ &= \nu Z'' + (b - ca)X \end{aligned}$$

Załóżmy, że $a \neq 0$ i weźmy $c = \frac{b}{a}$. Wtedy macierz przekształcenia F w bazie X, Y', Z'' jest postaci $\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.
Jeśli natomiast $a = 0$, możemy zamienić dwa ostatnie wektory bazowe i macierz F w bazie X, Z', Y' jest tej samej postaci $\begin{pmatrix} \lambda & b & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$. Są teraz dwie możliwości. Jeśli w ostatniej macierzy $b = 0$, macierz jest postaci J_1 z twierdzenia. Jeśli $b \neq 0$ dzielimy wektor bazowy odpowiadający drugiej kolumnie przez b i po przerzuceniu ostatniego wektora bazowego na początek w nowej bazie macierz przyjmuje postać J_3.

■

Rozdział 9

Izometrie przestrzeni $\mathbb{R}^3$

9.1. Izometrie

Definicja 9.1. Przekształcenie $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy *izometrią*, jeśli dla każdych $X, Y \in \mathbb{R}^3$ zachodzi $\|F(X) - F(Y)\| = \|X - Y\|$.

Przykładami izometrii przestrzeni są w szczególności *przekształcenie tożsamościowe*, *obroty*, *symetrie* oraz *translacje*.

Fakt 9.2. *Niech* $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ni A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ *będzie macierzą przekształcenia liniowego* $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*. Wówczas następujące warunki są równoważne*

(1) *A jest macierzą izometrii liniowej.*

(2) *Kolumny A są prostopadłe i mają długość* 1.

(3) $A^\mathsf{T} A = \mathbb{I}$.

(4) *Wiersze A są prostopadłe i mają długość* 1.

(5) $AA^\mathsf{T} = \mathbb{I}$.

Dowód.
$(1) \implies (2)$

Załóżmy, że A jest macierzą izometrii liniowej $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Oczywiście kolumnami A, odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią są odpowiednio wektory $F(E_1)$, $F(E_2)$ oraz $F(E_3)$. Ponieważ A zachowuje długości i iloczyn skalarny, wektory te, podobnie jak wektory $E_1, E_2 i E_3$ są prostopadłe i mają długość jeden.

$(2) \Longrightarrow (3)$

Załóżmy, że kolumny A są prostopadłe i mają długość 1.Wystarczy zauważyć, że wyrazy macierzy $A^\mathsf{T}A$ to iloczyny skalarne odpowiednich kolumn mecierzy A.

$$A^\mathsf{T}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

$(3) \Longleftrightarrow (5)$

Załóżmy, że $A^\mathsf{T}A = \mathbb{I}$. Wynika (na mocy faktu 2.35 oraz twierdzenia 2.36) stąd w szczególności, że macierze A^T oraz A są nieosobliwe. Istnieje zatem macierz A^{-1}. Wtedy $A^\mathsf{T} = A^{-1}$, skąd

$$AA^\mathsf{T} = AA^{-1} = \mathbb{I}.$$

Analogicznie dowodzi się implikacji odwrotnej.

$(5) \Longleftrightarrow (4)$

Załóżmy, że $AA^\mathsf{T} = \mathbb{I}$. Wystarczy zauważyć, że wyrazy macierzy AA^T to iloczyny skalarne odpowiednich wierszy macierzy A.

$$AA^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$(3) \Longrightarrow (1)$

Załóżmy, że $A^\mathsf{T}A = \mathbb{I}$. Na mocy lematu 5.3 mamy

$$\langle AX, AY \rangle = \left\langle X, A^\mathsf{T}AY \right\rangle = \langle X, Y \rangle,$$

więc przekształcenie liniowe odpowiadające macierzy A zachowuje iloczyn skalarny, zatem na mocy lematu 3.5 oraz twierdzenia 3.6 macierz A jest macierzą izometrii. ■

W powyższym dowodzie korzystaliśy z twierdzeń udowodnionych w rozdziale o przekształceniach przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Są one prawdziwe również w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Z faktu 9.2 wynika, że jeśli przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest izometrią, to $|\det F| = 1$. Zauważmy przy tym, iż implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Z faktu 9.2 wynika następujący, bardzo przydatny wniosek

Wniosek 9.3. Jeśli $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest macierzą izometrii, to A jest odwracalna oraz $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

9.2. Klasyfikacja izometrii $\mathbb{R}^3$

Niech F będzie liniową izometrią $\mathbb{R}^3$. Ponieważ wielomian charakterystyczny F jest trzeciego stopnia, ma pierwiastek λ, który jest wartością własną F. Oznacza to, że istnieje wektor własny $v \in \mathbb{R}^3$ o długości 1 taki, że

$$F(v) = \lambda v$$

Ponieważ F jest izometrią, mamy $1 = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| = |\lambda|$ skąd wnioskujemy, że $\lambda = 1$ lub $\lambda = -1$.

Rozważmy teraz wektor w prostopadły do v. Ponieważ $\langle F(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle = 0$, wektor $F(v)$ również jest prostopadły do w. A zatem biorąc wektory prostopadłe do v i działając na nie przekształceniem F będziemy zawsze otrzymywać wektory prostopadłe do v. Można zatem obciąć F do płaszczyzny π prostopadłej do wektora v.

$$\text{Niech} G : \pi \to \pi \text{będzie dane wzorem} G(w) = F(w)$$

Otrzymane w ten sposób G jest izometrią płaszczyzny a więc obrotem lub symetrią względem prostej przechodzącej przez zero.

Mamy teraz cztery możliwości:

(1) $\lambda = 1$, G jest obrotem o kąt θ

(2) $\lambda = 1$, G jest symetrią względem pewnej prostej l

(3) $\lambda = -1$, G jest obrotem o kąt θ

(4) $\lambda = -1$, G jest symetrią względem pewnej prostej l

W przypadku (1) przekształcenie F jest obrotem o kąt θ wokół prostej przechodzącej przez 0, mającej kierunek wektora v.

W przypadku (2) jest symetrią względem płaszczyzny generowanej przez prostą l i wektor v.

W przypadku (3) jest złożeniem obrotu o kąt θ wokół prostej generowanej przez wektor v i symetrii względem płaszczyzny π.

W przypadku (4) jest symetrią względem prostej l czyli obrotem wokół tej prostej o kąt 180^0.

Analizując powyższe cztery przypadki można wyciągnąć następujący wniosek.

Twierdzenie 9.4. *Każda izometria* $\mathbb{R}^3$ *jest złożeniem obrotu wokół prostej i symetrii względem płaszczyzny.*

Rozdział 10

Powierzchnie drugiego stopnia

10.1. Macierze symetryczne

Definicja 10.1. Macierz kwadratowa A nazywa się *symetryczna*, jeśli $A = A^{\mathsf{T}}$.

Definicja 10.2. Przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy *symetrycznym*, jeśli $\mathrm{m}\,(F)$ jest symetryczna.

Fakt 10.3. *Macierz A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $X, Y \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$.*

Fakt 10.4. *Przekształcenie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetryczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $X, Y \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\langle F(X), Y\rangle = \langle X, F(Y)\rangle$.*

Lemat 10.5. *Niech U będzie wektorem własnym symetrycznego przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Wówczas dla $X \in \mathbb{R}^3$, jeśli $\langle X, U\rangle = 0$, to $\langle F(X), U\rangle = 0$.*

Dowód. Niech U będzie wektorem własnym symetrycznego przekształcenia liniowego $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zaś λ — odpowiadającą mu wartością własną. Załóżmy, że dla $X \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\langle X, U\rangle = 0$. Wówczas

$$\langle F(X), U\rangle = \langle X, F(U)\rangle = \langle X, \lambda U\rangle = \lambda\,\langle X, U\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Twierdzenie 10.6 (Twierdzenie spektralne)**.** *Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną. Wówczas istnieją wektory własne U, V i W macierzy A takie, że $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$ oraz $\langle U, V\rangle = \langle U, W\rangle = \langle V, W\rangle = 0$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną macierzy $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (zgodnie z uwagą 8.26 taka wartość własna istnieje), zaś U odpowiadającym jej wektorem własnym. Ponadto, niech $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, odpowiadającym macierzy A.

Niech $\mathcal{A} = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X, U\rangle = 0\}$ będzie płaszczyzną prostopadłą do wektora U. Z lematu 10.5 wynika, że $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Określmy przekształcenie $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ wzorem $G(X) = F(X)$. Ponieważ F jest symetryczne, więc dla dowolnych wektorów $X, Y \in \mathcal{A}$ zachodzi równość $\langle G(X), Y\rangle = \langle X, G(Y)\rangle$.

Zatem z twierdzenia 5.4 istnieją wektory własne $V, W \in \mathcal{A}$ przekształcenia G takie, że $\|V\| = \|W\| = 1$ oraz $\langle V, W\rangle = 0$. Dla pewnych $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ zachodzą więc równości

$$\begin{aligned} G(V) &= \mu V, \\ G(W) &= \nu W. \end{aligned}$$

skąd $F(V) = \mu V$ oraz $F(W) = \nu W$, czyli V oraz W są wektorami własnymi przekształcenia F. Co więcej

$$\begin{aligned} \|V\| &= \langle V, V\rangle = \langle \phi(V'), \phi(V')\rangle = \langle V', V'\rangle = 1, \\ \|W\| &= \langle W, W\rangle = \langle \phi(W'), \phi(W')\rangle = \langle W', W'\rangle = 1, \\ \langle V, W\rangle &= \langle \phi(V'), \phi(W')\rangle = \langle V', W'\rangle = 0. \end{aligned}$$

Oczywiście $V, W \in \mathcal{A}$, więc $\langle U, V\rangle = \langle U, W\rangle = 0$. ■

10.2. Formy kwadratowe

Definicja 10.7. Funkcję $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ postaci

$$Q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$

dla $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$, nazywamy *formą kwadratową* trzech zmiennych.

Zauważmy przy tym, że $Q(X) = \langle AX, X\rangle$ co możemy również zapisać w formie $Q(X) = X^{\mathsf{T}}AX$, gdzie $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, przy czym $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i, j = 1, 2, 3$. Macierz A nazywamy *macierzą formy kwadratowej* Q, tzn. $\mathrm{m}(Q) = A$.

Rozważmy macierz A formy kwadratowej Q oraz odwracalną macierz P zadającą nowy układ współrzędnych $[X] = PX$. Powstaje pytanie, jaką postać ma macierz A w nowym układzie współrzędnych? Mamy

(10.1)

$$Q(X) = X^{\mathsf{T}}AX = \left(P^{-1}[X]\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}[X] = [X]^{\mathsf{T}} \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}[X].$$

Zatem macierz $\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}$ jest macierzą formy kwadratowej Q w nowym układzie współrzędnych. Macierz ta jest również symetryczna. Istotnie,

$$\left(\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \left(\left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} AP^{-1}. \tag{10.2}$$

Twierdzenie 10.8. *Niech $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Istnieje prostokątny liniowy układ współrzędnych zadany przez funkcje $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f_k(X) = x_k'$, $k = 1, 2, 3$, w którym $[X] = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ oraz*

$$Q([X]) = \lambda_1 f_1^2(X) + \lambda_2 f_2^2(X) + \lambda_3 f_3^2(X), \tag{10.3}$$

tzn.

$$Q([X]) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2. \tag{10.3$'$}$$

Dowód. Niech $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą formy kwadratowej $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Ponieważ A jest symetryczna, więc na mocy twierdzenia 10.6 istnieją wektory własne U, V i W macierzy A takie, że $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$ oraz $\langle U, V\rangle = \langle U, W\rangle = \langle V, W\rangle = 0$. Dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów U, V oraz W, tzn.

$$X = x_1' U + x_2' V + x_3' W,$$

gdzie $x_1', x_2', x_3' \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcje $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane wzorami $f_k(X) = x_k'$, $k = 1, 2, 3$ zadają prostokątny liniowy układ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym $[X] = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, tzn.

$$X = f_1(X)U + f_2(X)V + f_3(X)W.$$

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ będą wartościami własnymi macierzy A, odpowiadającymi wektorom własnym U, V i W. Mamy

$$\begin{aligned}
Q([X]) &= Q(x_1'U + x_2'V + x_3'W) = \\
&= \left\langle A\left(x_1'U + x_2'V + x_3'W\right), x_1'U + x_2'V + x_3'W \right\rangle = \\
&= \left\langle x_1'AU + x_2'AV + x_3'AW, x_1'U + x_2'V + x_3'W \right\rangle = \\
&= \left\langle x_1'\lambda_1 U + x_2'\lambda_2 V + x_3'\lambda_3 W, x_1'U + x_2'V + x_3'W \right\rangle = \\
&= \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2.
\end{aligned}$$

■

Uwaga 10.9. Wyrażenie po prawej stronie równości (10.3) lub (10.3′) nazywamy *postacią kanoniczną* formy kwadratowej Q.

10.3. Powierzchnie drugiego stopnia

Powierzchniami drugiego stopnia nazywamy powierzchnie zadane równaniem postaci

$$\langle AX, X\rangle + 2\,\langle B, X\rangle + c = 0, \tag{10.4}$$

gdzie

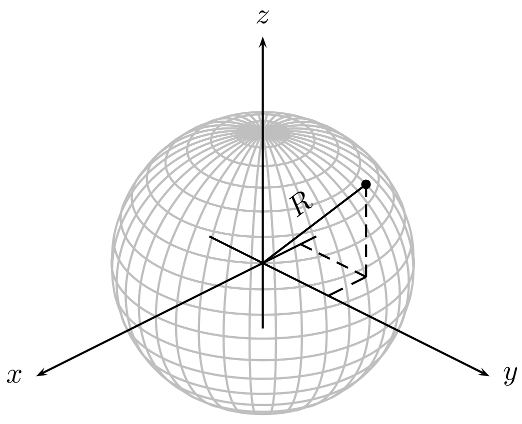
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

przy czym $A \neq 0$, tzn. $a_{ij} \neq 0$ dla pewnych $i, j = 1, 2, 3$. Wyrazy $a_{ij}x_ix_j$ nazywamy *wyrazami kwadratowymi*, wyrazy $2b_ix_i$ — *wyrazami liniowymi*, zaś c — *wyrazem wolnym.*

Przykład 10.10. *Sfera* o środku w punkcie 0 i promieniu $R > 0$ (rys. 1) jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

■

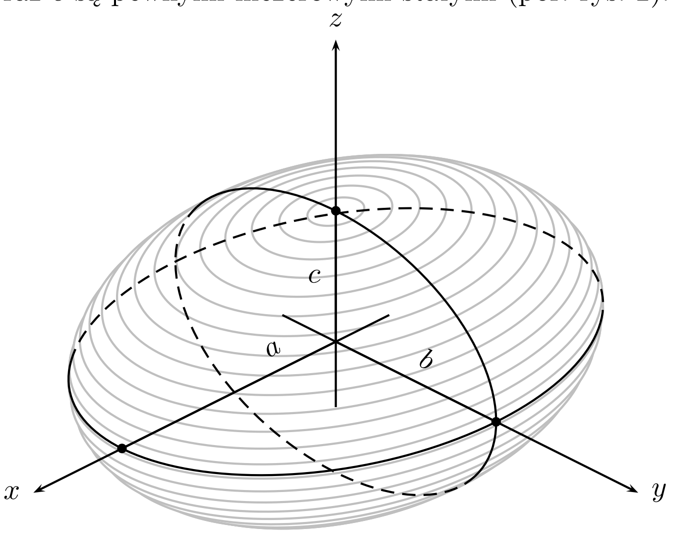


Rysunek 1

Przykład 10.11. *Elipsoida* o środku w punkcie 0 jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gdzie a, b oraz c są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 2). Zauważmy



Rysunek 2

przy tym, że elipsoida o środku w 0 jest obrazem sfery o środku w 0 i promieniu 1 (czyli sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) przez przekształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix}\right)$. Istotnie, niech punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ należy do sfery o równaniu $x^2+y^2+z^2=1$. Znajdziemy obraz punktu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ przez przekształcenie liniowe o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix}\right)$. Mamy

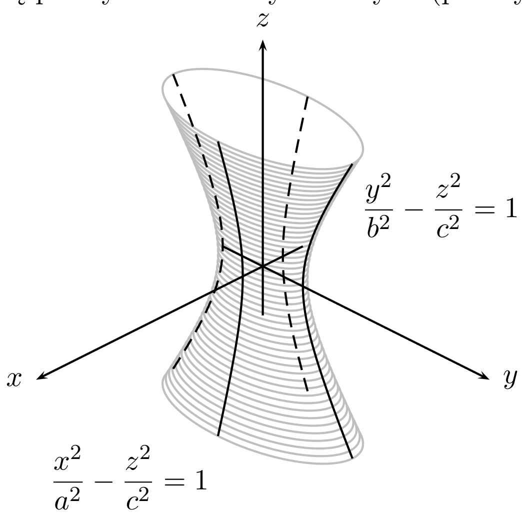
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix},$$

skąd $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{x'}{a} \\ \frac{y'}{b} \\ \frac{z'}{c} \end{pmatrix}$. Skoro $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ należy do sfery, to $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, czyli $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{c}\right)^2 = 1$. Zatem punkt $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ spełnia równanie elipsoidy. ■

Przykład 10.12. *Hiperboloida jednopowłokowa* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gdzie a, b oraz c są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 3). ■

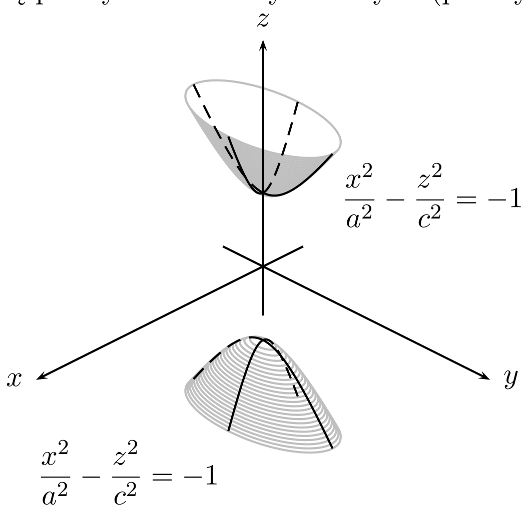


Rysunek 3

Przykład 10.13. *Hiperboloida dwupowłokowa* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

gdzie a, b oraz c są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 4). ■

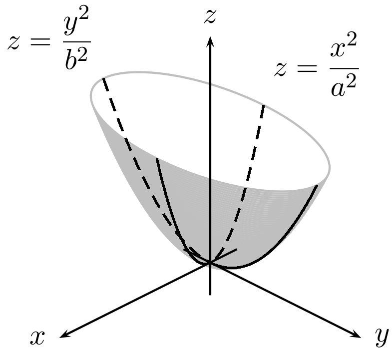


Rysunek 4

Przykład 10.14. *Paraboloida eliptyczna* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 5). ■

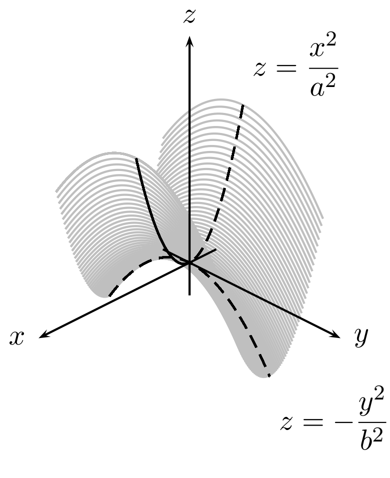


Rysunek 5

Przykład 10.15. *Paraboloida hiperboliczna* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} - z = 0,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 6). ■

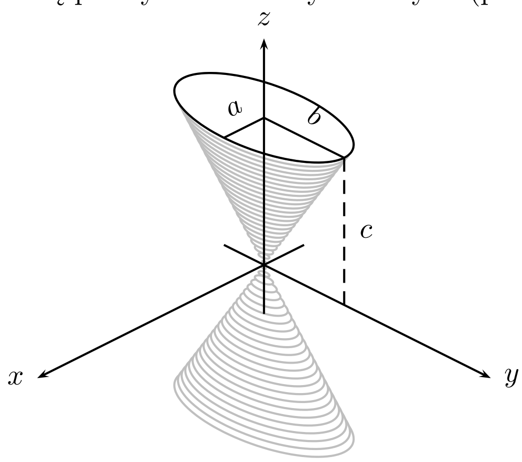


Rysunek 6

Przykład 10.16. *Stożek eliptyczny* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

gdzie a, b oraz c są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 7). ■

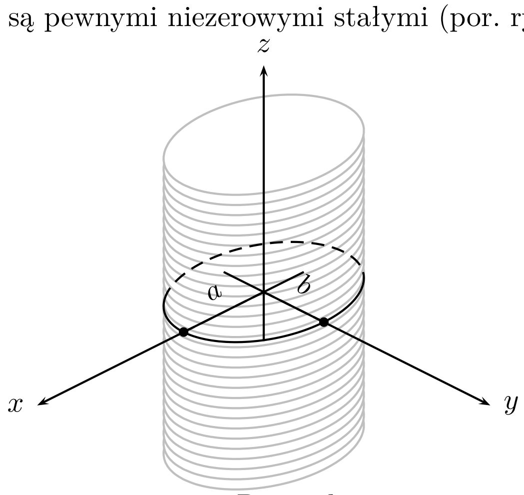


Rysunek 7

Przykład 10.17. *Walec eliptyczny* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 8). ■

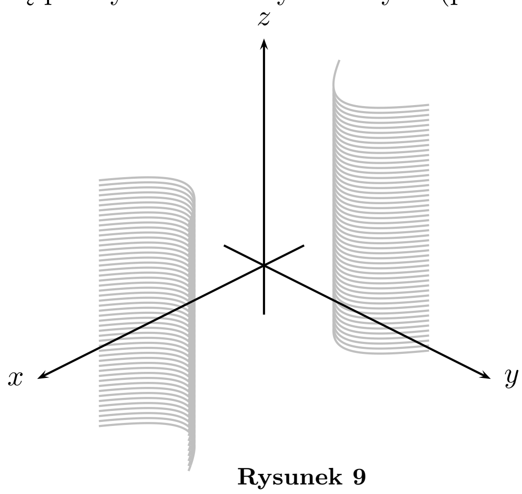


Rysunek 8

Przykład 10.18. *Walec hiperboliczny* jest powierzchnią drugiego stopnia o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie a oraz b są pewnymi niezerowymi stałymi (por. rys. 9). ■

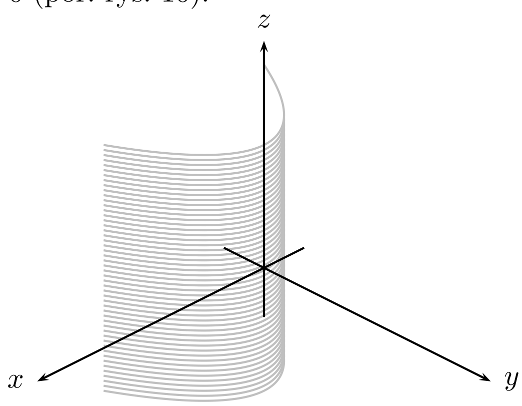


Rysunek 9

Przykład 10.19. *Walec paraboliczny* jest powierzchnią drugiego stopnia daną równaniem

$$ax^2 - y = 0,$$

gdzie $\mathbb{R} \ni a \neq 0$ (por. rys. 10). ■



Rysunek 10

Przypomnijmy, że liniowy układ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (zob. str. 104) zadany jest przez liniowo niezależne wektory $U, V, W \in \mathbb{R}^3$. Wtedy dowolny wektor $X \in \mathbb{R}^3$ można zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów U, V i W, tzn.

$$X = uU + vV + wW,$$

gdzie $u, v, w \in \mathbb{R}$ są współczynnikami X w układzie współrzędnych wyznaczonym przez liniowo niezależne wektory U, V i W. Układ taki nazywamy *prostokątnym*, jeśli $U \perp V$, $V \perp W$, $U \perp W$ oraz $\|U\| = \|V\| = \|W\| = 1$.

Zauważmy, że każdy prostokątny układ współrzędnych powstaje z układu standardowego przez pewną izometrię. Istotnie, jeśli dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^3$, $[X] = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych, to istnieje macierz izometrii liniowej $P = [p_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taka, że

$$[X] = PX$$

tzn.

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3, \\ x_2' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3, \\ x_3' = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3. \end{cases}$$

Niech Q będzie formą kwadratową o macierzy $\mathrm{m}\,(Q) = A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, przy czym $\det A \neq 0$. Wówczas równanie powierzchni (10.4) przyjmuje postać

$$Q(X) + 2\,\langle B, X\rangle + c = 0,$$

Na mocy twierdzenia (10.8) wiemy, że równanie formy Q w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych zadanym przez macierz P zależnością $X' = PX$ przyjmuje postać

$$Q(X') = \lambda_1\,(x_1')^2 + \lambda_2\,(x_2')^2 + \lambda_3\,(x_3')^2\,,$$

co można zapisać w postaci

$$Q(X') = \langle DX', X'\rangle\,,$$

gdzie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Pamiętając, że izometria nie zmienia iloczynu skalarnego a więc $\langle B, X\rangle = \langle PB, PX\rangle = \langle PB, X'\rangle$ możemy teraz zapisać równanie (10.4) w nowym układzie współrzędnych

$$\left\langle DX', X'\right\rangle + 2\left\langle PB, X'\right\rangle + c = 0,$$

Weźmy teraz $X'' = X' - V$ gdzie $V \in \mathbb{R}^3$. Ponieważ $X' = X'' + V$, równanie (10.4) we współrzędnych X'' przyjmuje postać

$$\left\langle D(X'' + V), X'' + V\right\rangle + 2\left\langle PB, X'' + V\right\rangle + c = 0,$$

czyli

$$\langle DX'', X''\rangle + \langle DX'', V\rangle + \langle DV, X''\rangle + \langle DV, V\rangle + 2\left\langle PB, X''\right\rangle + 2\left\langle PB, V\right\rangle + c = 0$$

Oznaczając teraz nową stałą $c' = \langle DV, V\rangle + 2\left\langle PB, V\right\rangle + c$ i korzystając z tego, że macierz D jest symetryczna skąd $\langle DX'', V\rangle = \langle X'', DV\rangle = \langle DV, X''\rangle$ możemy zapisać powyższe równanie w formie

$$\left\langle DX'', X''\right\rangle + 2\left\langle DV - PB, X''\right\rangle + c' = 0$$

Jeżeli udałoby się teraz dobrać wektor V tak by $\langle DV + PB, X''\rangle = 0$, powyższe równanie stałoby się jeszcze prostsze. Jeśli macierz D nie ma zer na przekątnej a więc jest odwracalna, wystarczy wziąć wektor V będący rozwiązaniem układu równań $DV = -PB$. Wtedy równanie powierzchni przyjmuje postać

$$\left\langle DX'', X''\right\rangle + c' = 0$$

czyli

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + \lambda_3(x_3'')^2 + c' = 0 \tag{10.6}$$

Równanie (10.6) nazywamy *postacią kanoniczną* równania (10.4).