Stare zadania z egzaminów

1. Podaj dwa przykłady baz B przestrzeni $\mathbf{R}^3$, takich że $[(1,0,-1)^\top]_B = (1,2,3)^\top$.

2. Niech f będzie funkcjonałem liniowym na $\mathbf{R}_4[X]$, takim że $f(P) = 7$ dla wszystkich P spełniających warunek $P(-1) + P'(1) = 4$. Oblicz
   a) (3 pkt) $f((X-2)^4)$;
   b) (3 pkt) $f(2X^4 - 3X^3 + 2X - 4)$.

3. Niech $V = \{P \in \mathbf{R}_3[X] : P'(0) + P(-1) = 0\}$. Określmy funkcję $Q : V \to \mathbf{R}$ wzorem $Q(P) = P'(-1)P(1)$. Sprawdź, że Q jest formą kwadratową (2 pkt) i wyznacz sygnaturę Q (4 pkt).

4. a) (3 pkt) Podaj przykład macierzy $A \in M_{4\times 4}(\mathbf{R})$, takiej że jądro F_A jest jednowymiarowe i jest zawarte w obrazie F_A. (Sprawdź żądane własności.)
   b) (3 pkt) Niech A będzie Twoim przykładem z punktu a). Rozstrzygnij, czy układ wektorów $(A(E_1) + \ker(F_A), A(E_2) + \ker(F_A), A(E_3) + \ker(F_A))$ w przestrzeni ilorazowej $\mathrm{Im}(F_A)/\ker(F_A)$ jest liniowo niezależny (3 pkt).

5. Czy dla dowolnych trzech podprzestrzeni V_1, V_2, V_3 dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3) = &\dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3)\\ &-\dim(V_1\cap V_2)-\dim(V_2\cap V_3)-\dim(V_3\cap V_1)\\ &+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)?\end{aligned}$$

6. Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią euklidesową, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Udowodnij, że istnieją bazy ortonormalne B, C przestrzeni V, takie że macierz $m_C^B(F)$ jest diagonalna.

7. Znajdź wymiar przestrzeni $\{P \in \mathbf{R}_4[X] : \begin{cases} P(-1)+P(1)=0 \\ P'(-1)+P'(1)=0 \\ P(1)+\frac{1}{3}P'''(0)=0 \end{cases}\}$.

8. Niech $Q((x,y,z)^\top) = x^2 + y^2 - z^2$. Dla każdej z poniższych par (p,q) podaj przykład dwuwymiarowej podprzestrzeni $V < \mathbf{R}^3$, takiej że obcięcie Q do V ma sygnaturę (p,q) – lub wykaż, że takie V nie istnieje.
   (a)[1p.] $(2,0)$; (b)[1p.] $(1,1)$; (c)[2p.] $(0,1)$; (d)[2p.] $(1,0)$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Podaj przykład niezerowego $f \in (\mathbf{R}^3)^*$, takiego że $\ker(f)$ jest F_A-niezmiennicze.

10. Niech A, B będą kwadratowymi macierzami o wyrazach zespolonych. Załóżmy, że $BA - AB = A$.
    a) [3p.] Niech v będzie wektorem własnym macierzy B: $Bv = \lambda v$. Udowodnij, że $B(A^n v) = (\lambda + n)A^n v$ (dla każdego $n \in \mathbf{N}$).

b) [3p.] Udowodnij, że $\det A = 0$.

11. Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Jaki jest największy możliwy rząd iloczynu AB, jeśli wiadomo, że $BA = 0$?

12. V – przestrzeń euklidesowa, $T : V \to V$ – przekształcenie liniowe. Niech $r = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T^*T)\}$.
    a) [2p.] Udowodnij, że dla każdego $v \in V$ zachodzi $\|Tv\| \leq \sqrt{r}\|v\|$.
    b) [2p.] Udowodnij, że jeśli dla niezerowych $v \in V$ zachodzi $\|Tv\| < \|v\|$, to

$$(\exists C < 1)(\forall v \in V)(\|Tv\| \leq C\|v\|).$$

    c) [2p.] Uzasadnij, że jeśli $U, W < V$, $U \cap W = \{0\}$, to

$$(\forall v \in V)(\lim_{n\to\infty} \|(P_U P_W)^n v\| = 0).$$

13. W $\mathbf{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź kąt między wektorem $(1, 0, 3, 0)^\top$ a podprzestrzenią $\mathrm{Lin}(\{(5, 3, 4, -3)^\top, (1, 1, 4, 5)^\top, (2, -1, 1, 2)^\top\})$.

14. Niech $F\colon M_{3\times 3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ będzie dane wzorem $F(M) = \frac{1}{2}(AM + MA)$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $\det F$.

15. Niech $\Phi(X, Y) = X^\top \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 12 \\ 3 & 10 & 17 \end{pmatrix} Y$ będzie formą dwuliniową na $\mathbf{R}^3$. Znajdź bazę $\mathbf{R}^3$, w której macierz formy kwadratowej $Q(X) = \Phi(X, X)$ jest diagonalna.

16. Niech $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_3[X]^*$ będą dane wzorami $\alpha(P) = P'(0)$, $\beta(P) = \int_0^1 P(x)dx$. Podaj przykład pary $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$, takiej że $\{f \in \mathbf{R}_3[X]^* : f(P) = f(Q) = 0\}$ jest podprzestrzenią dopełniczą do $\mathrm{Lin}(\{\alpha, \beta\})$. [Sprawdź żądaną własność.]

17. Czy istnieje przekształcenie liniowe $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, takie że wektory $(1, 0, 0)^\top$, $(0, 1, 0)^\top$, $(0, 0, 1)^\top$ i $(1, 0, 1)^\top$ są jego wektorami własnymi, ale wektor $(1, 1, 1)^\top$ nie jest jego wektorem własnym? [Podaj przykład takiego przekształcenia lub udowodnij, że takie przekształcenie nie istnieje.]

18. Niech U, V, W będą podprzestrzeniami pewnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Udowodnij, że

$$\dim U + \dim V + \dim W - \dim(U+V+W) \geq \max\{\dim(U\cap V), \dim(V\cap W), \dim(W\cap U)\}$$

19. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś $T\colon V \to V$ przekształceniem liniowym. Udowodnij, że $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Im}(T^*T)$.