Lista treningowa

zadania z kolokwium z zeszłego roku:

1. Rozstrzygnij, czy 4-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem 2-elementowym ma mniej, czy więcej niż 20000 baz (uporządkowanych).
2. Niech $N \in M_{20\times 20}(K)$, $N^{100} = 0$.
   a) (3 pkt.) Udowodnij, że macierz $I - N$ jest odwracalna.
   b) (4 pkt.) Udowodnij, że $N^{20} = 0$.
3. a) (0 pkt.) Uzasadnij, że dodanie i-tego wiersza macierzy M do jej ℓ-tego wiersza daje ten sam efekt, co zastąpienie macierzy M przez macierz $(I + E_i^\ell)M$ (gdzie E_i^ℓ jest macierzą, która ma jedynkę na miejscu $\binom{\ell}{i}$, a zera na wszystkich pozostałych miejscach).
   b) (7 pkt.) Udowodnij, że jeśli $A, A' \in M_{k\times n}(K)$ i $r(A) = r(A')$, to istnieją: bazy B, B' przestrzeni K^n; bazy C, C' przestrzeni K^k; przekształcenie liniowe $F\colon K^n \to K^k$ – takie, że $m_C^B(F) = A$ oraz $m_{C'}^{B'}(F) = A'$.

Inne stare zadania z kolokwiów.

4. Dla $n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$
   a) (2 pkt) udowodnij indukcyjnie wzór $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$;
   b) (2 pkt) oblicz $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)^n$.
5. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, takiego że $\ker(F)$ jest płaszczyzną $z = 0$, $\mathrm{im}(F)$ jest prostą, oraz kąt między $\ker(F)$ a $\mathrm{im}(F)$ wynosi $60°$ (napisz macierz jakiegoś przekształcenia o tych własnościach).
6. Pewne trzy wektory w $\mathbf{R}^3$ mają następujące własności: pierwszy z nich jest kombinacją liniową drugiego i trzeciego, a trzeci z nich nie jest kombinacją liniową pierwszego i drugiego. Czy drugi z tych wektorów
   a) (2 pkt) może,
   b) (2 pkt) musi

   być kombinacją liniową pierwszego i trzeciego?
7. (Zadanie Pana Gala; 4 pkt) Niech z_1, z_2, z_3 będą liczbami zespolonymi odpowiadającymi trzem punktom nie leżącym na jednej prostej. Co to za zbiór:

$$\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\big((z - z_1)\overline{(z_2 - z_3)}\big) = 0\}.$$

   (Zbadaj co to za figura geometryczna i określ jej położenie względem punktów z_1, z_2, z_3.)
8. Niech $F : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_1[X]$ będzie dane wzorem $F(P) = P''(X) + P(-1)X$.
   a) (1 pkt) Sprawdź, że F jest przekształceniem liniowym.
   b) (2 pkt) Wyznacz $\dim\ker(F)$ i znajdź jakąś bazę B przestrzeni $\ker(F)$.
   c) (1 pkt) Rozszerz B do bazy C przestrzeni $\mathbf{R}_3[X]$.
   d) (2 pkt) Wskaż bazę D przestrzeni $\mathbf{R}_1[X]$, taką by w macierzy $m_D^C(F)$ było możliwie dużo zer.

9. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Dla których spośród następujących wektorów Y układ $AX = Y$ ma rozwiązanie: (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 27213 \\ 152 \\ 721 \end{pmatrix}$; (g) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; (h) $\begin{pmatrix} -10 \\ -100 \\ 4 \end{pmatrix}$; (i) $\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$; (j) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; (k) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; (l) $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; (m) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$; (n) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$; (o) $\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$; (p) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (r) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (s) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (t) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (u) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (w) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (x) $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (y) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; (z) $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

10. Wiadomo, że $F : V \to W$, $G : W \to Z$ oraz $H : Z \to V$ są przekształceniami liniowymi, B jest bazą V, C jest bazą W, zaś D jest bazą Z. Ponadto wiadomo, że $H \circ G \circ F = Id$, $m_D^B(G \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $m_B^C(H \circ G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    Znajdź $m_C^D(F \circ H)$.

11. Załóżmy, że $F : V \to W$ i $G : V \to Z$ są przekształceniami liniowymi, przy czym $\ker(F) \subseteq \ker(G)$. Udowodnij, że istnieje przekształcenie liniowe $H : W \to Z$, takie że $G = H \circ F$.

12. Oblicz i narysuj pierwiastki 4–tego stopnia z liczby $-8 + 8\sqrt{3}i$.
    [Wyraź te pierwiastki w postaci $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.]

13. Załóżmy, że $U = \binom{3}{4}$, $V = \binom{0}{5}$, ℓ jest prostą w $\mathbf{R}^2$ przechodzącą przez $\binom{0}{0}$, S_ℓ jest symetrią (osiową) względem ℓ oraz $S_\ell(U) = V$. Znajdź $m(S_\ell)$.

14. Czy jest prawdą, że dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V i dowolnych przekształceń liniowych $F, G\colon V \to V$ zachodzi wzór: $\dim\ker(F \circ G) = \dim\ker(G \circ F)$? Podaj dowód lub kontrprzykład.

15. Czy istnieje odwzorowanie liniowe $F\colon \mathbf{R}^{100} \to \mathbf{R}^{100}$, takie że:
    a) $\dim \mathrm{Im}(F) = 99$, $\dim \mathrm{Im}(F \circ F) = 97$?
    b) $\dim \mathrm{Im}(F) = 98$, $\dim \mathrm{Im}(F \circ F) = 97$?