Algebra homologiczna, Lista 1

1. Podaj trzy inne niż na wykładzie przykłady kategorii (w tym co najmniej jeden naturalny i co najmniej jeden sztuczny).
2. Podaj trzy inne niż na wykładzie przykłady funktorów (w tym co najmniej jeden kowariantny i co najmniej jeden kontrawariantny).

Funktor (kowariantny) $F\colon \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ *to odwzorowanie* $F\colon Ob\,\mathtt{C} \to Ob\,\mathtt{D}$ *oraz kolekcja funkcji* $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ *spełniająca warunki:*

$$(a)\ F(\phi\circ\psi) = F(\phi)\circ F(\psi), \qquad (b)\ F(id_X) = id_{F(X)}.$$

3. Czy w powyższej definicji warunek (b) wynika z warunku (a)?
4. Czy jest funktorem z kategorii grup w kategorię grup: (a) komutant, (b) abelianizacja, (c) centrum?
5. Niech $\mathtt{C}_G$ będzie grupą G zintepretowaną jako kategoria. Czym jest – w standardowej terminologii matematycznej – kowariantny funktor (a) $\mathtt{C}_G \to \mathtt{Set}$; (b) $\mathtt{C}_G \to \mathtt{Vect}_K$?
6. Uzasadnij, że kategorie $\mathtt{C}_G$ i $\mathtt{C}_G^{op}$ są izomorficzne.
7. Obiektami kategorii $\mathtt{Mat}_K$ są dodatnie liczby całkowite, $\mathrm{Hom}(k,n) = M_{n\times k}(K)$, a składanie to mnożenie macierzy. Uzasadnij, że ta kategoria jest izomorficzna ze swoją kategorią odwrotną.

Morfizm $f \in Hom(X,Y)$ *nazywamy izomorfizmem, jeśli istnieje* $g \in \mathrm{Hom}(Y,X)$*, taki że* $f\circ g = id_Y$, $g\circ f = id_X$*. Ów morfizm* g *nazywamy odwrotnym do* f*. Obiekty nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje miedzy nimi izomorfizm.*

8. Udowodnij, że $id_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez warunki $id_X \circ f = f$, $g\circ id_X = g$. Udowodnij, że izomorfizm ma jedyny morfizm odwrotny.
9. Uzasadnij, że jeśli A i B są izomorficznymi obiektami kategorii $\mathtt{C}$, zaś $F\colon \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ jest funktorem, to $F(A)$ i $F(B)$ też są izomorficzne.

Obiektem początkowym kategorii $\mathtt{C}$ *nazywamy taki jej obiekt* A*, że dla każdego jej obiektu* B *istnieje jedyny morfizm* $A \to B$*. Obiektem końcowym kategorii* $\mathtt{C}$ *nazywamy taki jej obiekt* Z*, że dla każdego jej obiektu* B *istnieje jedyny morfizm* $B \to Z$*.*

10. Uzasadnij, że obiekt początkowy (końcowy) kategorii jest jedyny z dokładnościa do izomorfizmu (o ile w ogóle istnieje).
11. Przejrzyj swoją listę przykładów kategorii – w których istnieją obiekty początkowe, a w których końcowe?
12. Opisz obiekt początkowy kategorii pierścieni przemiennych (z jedynką) z wyróżnionym elementem.