Algebra homologiczna, Lista 2

1. Wymyśl własne przykłady naturalnych przekształceń funktorów.
2. Niech X będzie otwartym podzbiorem $\mathbf{R}^n$ (lub, jeśli wolisz, gładką rozmaitością). Rozważmy snop gładkich funkcji na X, traktowany jako funktor $\mathtt{Otw}_X^{op} \to \mathtt{Vect}_{\mathbf{R}}$. Podaj przykłady naturalnych przekształceń tego funktora w siebie, możliwie nietrywialne.

   Przypomnienie: $\mathtt{C}_G$ *to jednoobiektowa kategoria związana z grupą* G*.*
3. Opisz podkategorie $\mathtt{C}_G$.
4. Funktory $\mathtt{C}_{\mathbf{Z}} \to \mathtt{C}_G$ odpowiadają elementom grupy G. Relacja naturalnej izomorficzności takich funktorów prowadzi, przez tę odpowiedniość, do pewnej relacji równoważności na grupie G. Co to za relacja na G?
5. Niech $F, F' \colon \mathtt{C}_G \to \mathtt{Set}$ będą funktorami. Czym jest – w standardowej terminologii matematycznej – naturalne przekształcenie $f \colon F \to F'$?
6. Dokończ dowód równoważności kategorii $\mathtt{Vect}_K^f$ i jej kategorii szkieletowej (tj. pełnej podkategorii rozpiętej przez obiekty postaci K^n): na wykładzie omówiliśmy funktory w obie strony – pokaż, że złożenia tych funktorów są naturalnie izomorficzne z funktorami identycznościowymi.
7. Uzasadnij, że funktor zadający równoważność kategorii musi być pełny, wierny i w zasadzie surjektywny.
8. Uzasadnij, że kategorie $\mathtt{Vect}_K^f$ i $(\mathtt{Vect}_K^f)^{op}$ są równoważne.
9. Udowodnij, że kategoria skończonych grup abelowych jest równoważna swojej kategorii odwrotnej.
10. Niech k będzie ciałem charakterystyki zero, K – jego rozszerzeniem Galois, $G = \mathrm{Gal}(K|k)$. Rozważmy kategorię skończenie wymiarowych k-algebr izomorficznych z algebrami postaci $\bigoplus K_i$, gdzie K_i są rozszerzeniami k zawartymi w K. Udowodnij, że kategoria odwrotna do opisanej jest równoważna kategorii skończonych G-zbiorów.