Algebra homologiczna, Lista 3

1. Uzasadnij, że w kategorii zbiorów istnieją wszystkie granice i kogranice.
2. Załóżmy, że w kategorii $\mathtt{C}$ istnieją:
   (i) obiekt końcowy,
   (ii) wszystkie ekwalizatory par morfizmów,
   (iii) produkty dowolnych par obiektów.
   Udowodnij, że wtedy w kategorii $\mathtt{C}$ istnieją wszystkie skończone granice (tj. granice funktorów $F\colon \mathtt{I} \to \mathtt{C}$ określonych na kategoriach $\mathtt{I}$ w których jest skończenie wiele obiektów i skończenie wiele morfizmów).
   (Wsk. Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie.)
3. Udowodnij, że w $\widehat{\mathtt{C}}$ istnieją wszystkie granice i kogranice ($\mathtt{C}$ – mała kategoria).
4. Udowodnij następujący wariant lematu Yonedy: dla dowolnego $A \in Ob\,\mathtt{C}$ i dowolnego $X \in Ob\,\widehat{\mathtt{C}}$ zachodzi naturalny izomorfizm zbiorów $\mathrm{Hom}(h_A, X) \simeq X(A)$.
5. Ustalmy małą kategorię $\mathtt{I}$ i jakąś kategorię $\mathtt{C}$. *Funktor diagonalny* $\Delta\colon \mathtt{C} \to Funct(\mathtt{I}, \mathtt{C})$ określamy tak:
   (i) obiektowi A kategorii $\mathtt{C}$ przypisujemy funktor stały: $\Delta A(j) = A$ dla $j \in Ob\,\mathtt{I}$, $\Delta A(\phi) = id_A$ dla morfizmów ϕ kategorii $\mathtt{I}$;
   (ii) morfizmowi $\varphi\colon A \to B$ kategorii $\mathtt{C}$ przypisujemy naturalne przekształcenie funktorów $\Delta\varphi\colon \Delta A \to \Delta B$ dane przez $\Delta\varphi(j) = \varphi\colon \Delta A(j) = A \to B = \Delta B(j)$ dla $j \in Ob\,\mathtt{I}$.
   Niech $F\colon \mathtt{I} \to \mathtt{C}$ będzie funktorem. Udowodnij, że:
   (a) elementy $\mathrm{Hom}(\Delta Y, F)$ odpowiadają stożkom o wierzchołku Y nad funktorem F (czyli rodzinom zgodnych odwzorowań które pojawiają się w definicji granicy F);
   (b) funktor $\mathtt{C}^{op} \to \mathtt{Set}$ zadany przez $Y \mapsto \mathrm{Hom}(\Delta Y, F)$ jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\lim F$ – a obiekt go reprezentujący jest właśnie tą granicą.
6. Opisz produkt i koprodukt pary obiektów w następujących kategoriach: zbiory; grupy; przestrzenie topologiczne; przestrzenie topologiczne z wyróżnionym punktem; pierścienie przemienne z 1; moduły nad ustalonym pierścieniem; zbiór częściowo uporządkowany.
7. Czy w kategorii ciał (ciał ustalonej charakterystyki) istnieją produkty/koprodukty?

Morfizm $i\colon A \to B$ nazywamy monomorfizmem, jeśli dla każdej pary $f, g\colon C \to A$ z równości $i \circ f = i \circ g$ wynika równość $f = g$.

8. Uzasadnij, że ekwalizator jest monomorfizmem. Zdefiniuj epimorfizm i uzasadnij, że koekwalizator jest epimorfizmem.
9. Podaj przykład kategorii i morfizmu, który jest monomorfizmem i epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

10.* Niech $\mathtt{C}$ będzie małą kategorią. Udowodnij, że odwzorowanie Yonedy $h\colon \mathtt{C} \to \widehat{\mathtt{C}}$ jest ciągłe i ma kogęsty obraz.