

Algebra homologiczna, Lista 4

1. Znajdź swoje ulubione pary funktorów sprzężonych.
2. Opisz funktor lewo-sprzężony i funktor prawo-sprzężony do funktora zapominającego $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$.
3. Załóżmy, że dla pewnej kategorii $\mathbf{C}$ i pewnej małej kategorii $\mathbf{I}$ każdy funktor $F: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$ ma granicę. Zorganizuj takie granice w funktor $\lim: \mathbf{Funct}(\mathbf{I}, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$; następnie uzasadnij, że ten funktor $\lim$ jest prawo-sprzężony do funktora diagonalnego $\Delta: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Funct}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$ (określonego na liście 3). Wynika stąd, że granice zachowują granice – tylko co to właściwie znaczy?
4. Niech $\phi: A \rightarrow B$ będzie homomorfizmem grup abelowych. Rozważamy funktory $\mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$.
 - a) Funktor $X \mapsto \ker(h_\phi(X): \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B))$ jest reprezentowalny – reprezentowany przez $\ker \phi$.
 - b) Funktor $X \mapsto \text{coker}(h_\phi(X): \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B))$ jest reprezentowalny – reprezentowany przez $\text{coker } \phi$.Udowodnij to z powyższych stwierdzeń, które jest prawdziwe, i podaj kontrprzykład na to, które jest fałszywe.

Funktor F między kategoriami addytywnymi nazywamy addytywnym, jeśli indukowane przezeń odwzorowania $\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$ są homomorfizmami grup. Dla addytywnej kategorii $\mathbf{A}$ niech $\tilde{\mathbf{A}}$ oznacza kategorię addytywnych funktorów $\mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$.
5. Dla obiektu A kategorii addytywnej $\mathbf{A}$ niech h_A oznacza funktor $\mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ zadany przez $B \mapsto \text{Hom}(B, A)$. Zauważ, że jest to funktor addytywny. Zauważ, że dla funktora $\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$ zadanego przez $A \mapsto h_A$ zachodzi lemat Yonedy.
6. Udowodnij, że dla dowolnego morfizmu f kategorii addytywnej naturalny morfizm $\text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ jest mono- i epimorfizmem.
7. Udowodnij, że addytywna kategoria jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy morfizm ma jądro i коядро, każdy epimorfizm jest коядром swego jądra, a każdy monomorfizm jest jądrzem swego коядра.
8. Sprawdź, że jeśli $\mathbf{A}$ jest kategorią abelową, to $\mathbf{A}^{op}$ też jest kategorią abelową.
9. Sprawdź, że kategoria presnopów grup abelowych nad przestrzenią topologiczną X jest abelowa. Sprawdź, że jeśli $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ jest morfizmem presnopów grup abelowych które przypadkiem są snopami, to presnop $\ker f$ też jest snopem, ale presnop $\text{coker}(f)$ już niekoniecznie. Czy w kategorii snopów wszystkie morfizmy mają коядра?
10. Niech H będzie podgrupą grupy G . Czy funktor zapominający $G\text{-Set} \rightarrow H\text{-Set}$ ma funktor lewo-sprzężony? A prawo-sprzężony?