

Algebra homologiczna, Lista 5

1. Zdefiniuj i -te kohomologie $H^i: \text{Kom } \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ jako funktor.

Przypomnienie: “elementem” obiektu Y nazywamy klasę równoważności morfizmu $y: X \rightarrow Y$ względem relacji zgodnej dominacji przez epimorfizmy. Piszemy: $y \in Y$.

2. Udowodnij, że:

- a) $f: Y \rightarrow Y'$ jest epi $\iff$ każdy $y' \in Y'$ jest postaci $f(y)$ dla pewnego $y \in Y$.
- b) $f: Y \rightarrow Y'$ jest morfizmem zerowym $\iff (\forall y \in Y)(f(y) = 0)$.
- c) $f: Y \rightarrow Y'$ jest mono $\iff (\forall y_1, y_2 \in Y)(f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$.
- d) ciąg $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ jest dokładny $\iff (\forall b \in B)(g(b) = 0 \Rightarrow (\exists a \in A)(f(a) = b))$.
- e) [różnica elementów] jeśli $f: Y \rightarrow Y'$, $y_1, y_2 \in Y$ oraz $f(y_1) = f(y_2)$, to istnieje $z \in Y$, taki że: $f(z) = 0$; $g(z) = -g(y_2)$ dla każdego $g: Y \rightarrow Y''$ spełniającego $g(y_1) = 0$; $g(z) = g(y_1)$ dla każdego $g: Y \rightarrow Y''$ spełniającego $g(y_2) = 0$.
- f) [było na wykładzie] $f: Y \rightarrow Y'$ jest mono $\iff (\forall y \in Y)(f(y) = 0 \Rightarrow y = 0)$.

3. Uzupełnij dowód Lematu o węzu: sprawdź dokładność w jeszcze kilku miejscach.
4. Udowodnij Lemat o pięciu izomorfizmach: jeśli w poniższym przemienym diagramie wiersze są dokładne, zaś a, b, d, e są izomorfizmami, to c też jest izomorfizmem.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
 \end{array}$$

Spróbuj przeprowadzić i porównać trzy dowody: (a) odwołujący się do tw. Freyda-Mitchella; (b) używający zadania 2; (c) czysto kategoryjny, niemówiący w ogóle o żadnych elementach.

5. Sprawdź, że dla każdego obiektu X kategorii abelowej $\mathbf{A}$ funktory $\text{Hom}(X, -): \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $\text{Hom}(-, X): \mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ są lewo-dokładne.
6. Udowodnij, że funktor dokładny przeprowadza ciągi dokładne (dowolnej długości i niekoniecznie kończące się zerami) na ciągi dokładne.
7. Udowodnij, że jeśli funktor F jest lewo-dokładny, to dla każdego dokładnego ciągu $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ indukowany ciąg $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$ też jest dokładny.
8. Uzasadnij równoważność dwóch określeń obiektu projektywnego omawianych na wykładzie (dokładność funktora $\text{Hom}(P, -)$; faktoryzacja przez epimorfizmy).
9. Uzasadnij, że każdy moduł projektywny jest składnikiem prostym modułu wolnego.

Szwindel Eilenberga: dla każdego modułu projektywnego P istnieje wolny moduł F , taki że moduł $P \oplus F$ jest wolny.

10. Uzasadnij, że moduł P jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy krótki ciąg dokładny $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$ rozszczepia się. A jak jest dla modułów injektywnych?