

Algebra homologiczna, Lista 6

$\mathbf{A}$ oznacza kategorię abelową. Wolno zakładać, że jest to kategoria R -modułów.

1. Udowodnij, że złożenie morfizmów w kategorii zlokalizowanej (zlokalizowanej względem pewnej klasy lokalizującej) jest niezależne od wyboru domku reprezentującego drugi ze składanych morfizmów.
2. Uzasadnij, że $D(\mathbf{A})$ jest kategorią addytywną (najpierw zdefiniuj dodawanie domków).
3. Uzasadnij, że morfizm kompleksów $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ indukuje zerowy morfizm w $D(\mathbf{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ft \sim 0$ dla pewnego quasi-izomorfizmu t . Udowodnij, że morfizm kompleksów

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \times 1 & & \downarrow \times 2 & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 1} & \mathbf{Z}/3 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

zadaje niezerowy morfizm w $D(\mathbf{Ab})$, mimo że indukuje zerowe odwzorowanie na kohomologiach.

Trójkątem w kategorii z przesunięciem (np. w $\text{Kom}(\mathbf{A})$, $K(\mathbf{A})$, $D(\mathbf{A})$) nazywamy ciąg morfizmów $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$. Dowolny morfizm kompleksów $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ (czyli morfizm w kategorii $\text{Kom}(\mathbf{A})$) można umieścić w trójkącie

$$(1) \quad A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \rightarrow C(f) \rightarrow A^\bullet[1].$$

Morfizm trójkątów to przemienny diagram postaci

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A[1] \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow a[1] \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & A'[1]
 \end{array}$$

Trójkąt w $D(\mathbf{A})$ nazywamy *wyróżnionym* (lub *dokładnym*) jeśli jest izomorficzny (w $D(\mathbf{A})$) z trójkątem postaci (1).

4. Z każdym wyróżnionym trójkątem w $D(\mathbf{A})$ związany jest długi ciąg dokładny kohomologii – wytłumacz w jaki sposób. (Wsk. $0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow C(f) \rightarrow A^\bullet[1] \rightarrow 0$ jest dokładnym ciągiem kompleksów.)
5. Z krótkim ciągiem dokładnym kompleksów $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \rightarrow 0$ można związać przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 A^\bullet & \xrightarrow{f} & B^\bullet & \xrightarrow{\tau} & C(f) & & \\
 \downarrow id_A & & \downarrow id_B & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & A^\bullet & \xrightarrow{f} & B^\bullet & \xrightarrow{g} & C^\bullet \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

w którym $\gamma(a^{i+1}, b^i) = g(b^i)$. Udowodnij, że γ jest quasi-izomorfizmem. (Wsk. pokaż, że $\ker \gamma \simeq C(id_A)$.) Górny wiersz diagramu uzupełnia się w wiadomy sposób do trójkąta wyróżnionego – co prowadzi do długiego ciągu dokładnego kohomologii. Dolny wiersz też daje długi ciąg dokładny kohomologii – poprzez lemat o węźle. Udowodnij, że te dwa długie ciągi dokładne są takie same (naturalnie izomorficzne).

6. Udowodnij, że jeśli $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{c} X[1]$ jest w $D(\mathbf{A})$ trójkątem wyróżnionym, to także trójkąty $Y \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{c} X[1] \xrightarrow{-a[1]} Y[1]$, $Z[-1] \xrightarrow{-c[-1]} X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} Z$ są wyróżnione.