Budynki Titsa, lista 1

$W$ oznacza grupę Coxetera ze skończonym układem generatorów $S$.

1. Niech $0 < V_1 < \ldots V_{n-1} < V_n = K^n$ i $0 < W_1 < \ldots W_{n-1} < W_n = K^n$ będą dwoma maksymalnymi flagami. Dla każdego $i$ ustalmy minimalne $\ell$ takie że naturalne odwzorowanie $W_\ell \cap V_i \to V_i/V_{i-1}$ jest surjekcją, a następnie wybierzmy wektor $b_i \in (W_\ell \cap V_i) \setminus V_{i-1}$. Udowodnij, że zbiór $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą $K^n$ z której można wybrać bazę każdej z przestrzeni $V_i$ i każdej z przestrzeni $W_j$. Uzasadnij też, że przyporządkowanie $i \mapsto \ell$ opisane wyżej jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$.
2. Dowiedz się co to jest graf Heawooda i sprawdź, że budynek grupy $GL_3(\mathbf{F}_2)$ (narysowany na wykładzie) jest grafem z nim izomorficznym.
3. Uzasadnij, że apartament w budynku grupy $GL_n(K)$ jest izomorficzny z kompleksem Coxetera grupy $S_n$ (wyposażonej w układ generatorów $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$). Ile jest izomorfizmów?
4. Kiedy dwie bazy wyznaczają ten sam apartament?
5. Uzasadnij, że $GL_n(K)$ działa tranzytywnie: na zbiorze pokoi; na zbiorze sympleksów ustalonego typu; na zbiorze apartamentów; na zbiorze par (pokój $\subseteq$ apartament).
6. Niech $(e_1, \ldots, e_n)$ będzie standardową bazą $K^n$. Opisz stabilizator $U$ w $GL_n(K)$ pokoju odpowiadającego fladze $0 < lin(e_1) < lin(e_1, e_2) < \ldots < lin(e_1, \ldots, e_{n-1}) < K^n$. Uzasadnij, że pokoje są w bijekcji z podgrupami $GL_n(K)$ sprzężonymi z $U$. Rozważ w podobny sposób stabilizatory niemaksymalnych sympleksów i stabilizatory apartamentów.
7. Opisz wszystkie zachowujące typ automorfizmy kompleksu Coxetera.
8. Uzasadnij, że $W_T \cap W_U = W_{T\cap U}$, i że $\langle W_T, W_U \rangle = W_{T\cup U}$ (gdzie $T, U \subseteq S$). Udowodnij, że $W_T$ jest stabilizatorem $T$-residuum kompleksu Coxetera zawierającego 1. Udowodnij, że kompleks Coxetera jest kompleksem symplicjalnym.
9. Udowodnij, że jeśli $\pm\alpha$ jest parą pierwiastków odpowiadających odbiciu $r$, to $\partial\alpha = \partial(-\alpha) = M_r$.
10. (Własność wymiany) Udowodnij, że jeśli $w = s_1 s_2 \ldots s_k$ i $\ell(wt) < \ell(w)$, to istnieje $i$ takie że $wt = s_1 s_2 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_k$. $(t, s_j \in S)$