

Budynki Titsa, lista 5

1. Zakładamy, że  $X$  jest budynkiem w którym każdy panel leży w skończenie wielu pokojach, zaś  $G < Aut_+(X)$  domkniętą podgrupą działającą tranzytywnie na zbiorze  $Ch(X)$  pokoi budynku  $X$ .
  - a) Udowodnij, że dla każdego  $s \in S$  istnieje liczba  $q_s$  taka że każdy panel typu  $s$  leży w  $q_s + 1$  pokojach.
  - b) Udowodnij, że jeśli  $m_{st}$  jest nieparzysta, to  $q_s = q_t$ .
  - c) Udowodnij, że miara Haara stabilizatora pokoju nie zależy od wyboru pokoju.
2. Niech  $(W, S)$  będzie grupą Coxetera; dla każdego generatora  $s \in S$  wybierzmy liczbę całkowitą dodatnią  $q_s$  (wybieramy tak, by dla  $m_{st}$  nieparzystego  $q_s$  było równe  $q_t$ ). Algebrę  $H$  określamy jako łączną algebrę z jedyneką zadaną przez generatory  $(T_s)_{s \in S}$  i relacje  $T_s^2 = q_s \cdot 1 + (q_s - 1) \cdot T_s$ ,  $(T_s T_t)^{m_{st}/2} = (T_t T_s)^{m_{st}/2}$ . Udowodnij, że otrzymana algebra jest algebrą Hecke'go rozważaną na wykładzie. [Współczynniki można brać z  $\mathbf{Z}$  lub z  $\mathbf{C}$ , wedle uznania.]
3. Uogólnionym  $m$ -kątem nazywamy spójny dwudzielny graf o średnicy  $m$  i systolu  $2m$ , w którym z każdego wierzchołka wychodzą przynajmniej dwie krawędzie (*systol* to długość najkrótszego zamkniętego cyklu). Udowodnij, że budynek o grupie Weyla  $\langle s, t, | s^2, t^2, (st)^m \rangle$  jest uogólnionym  $m$ -kątem. Czy jest też odwrotnie?
4. Udowodnij, że w grubym (walencja każdego wierzchołka  $\geq 3$ ) uogólnionym  $m$ -kącie wierzchołki tego samego typu mają równe walencje. Jeśli ponadto  $m$  jest nieparzyste, to wszystkie wierzchołki mają taką samą walencję. (zakładamy  $m < \infty$ )
5. Niech  $(B, N)$  będzie BN-parą w  $G$ ,  $T \subseteq S$ . Niech  $N_T = \alpha^{-1}(W_T)$ . Pokaż, że  $(B, N_T)$  jest BN-parą w  $P_T$ .
6. Niech  $b$  będzie pokojem  $X$ ,  $A$  apartamentem zawierającym ten pokój. Udowodnij, że odwzorowanie  $\rho_{b,A}: X \rightarrow \Sigma_W$  będące złożeniem  $\pi_{b,A}$  i jedyne go izomorfizmu  $A \rightarrow \Sigma_W$  posyłającego  $b$  w 1 nie zależy od wyboru  $A$ . [Otrzymane  $\rho_b: X \rightarrow \Sigma_W$ , czy nawet indukowane przez nie  $\rho_b: Ch(X) \rightarrow W$ , nazwiemy abstrakcyjnym foldingiem.]
7. Niech  $x \in Ch(X)$ ,  $T \subseteq S$ ,  $R = Res(x, T)$ . Uzasadnij, że w  $R$  istnieje jedyny pokój  $x_0$  najbliższy (w sensie odległości galeriowej) pokojowi  $b$ . Niech  $\rho_R: R \rightarrow W_T$  będzie dane przez  $\rho_R(y) = \rho_b(x_0)^{-1} \rho_b(y)$ . Uzasadnij, że  $\rho_R$  jest (abstrakcyjnym) foldingiem budynku  $R$  zbazowanym w  $x_0$ .