Budynki Titsa, lista 6

Na tej liście K oznacza ciało z waluacją v.

1. Udowodnij, że jeśli grupa Weyla budynku jest produktem dwóch grup Coxetera ($(W, S) = (W_1, S_1) \times (W_2, S_2)$), to sam budynek jest joinem dwóch budynków.
2. Wyznacz grupę Weyla budynku grupy $SL(n, K)$.
3. Udowodnij, że jeśli L, M są kratami w K^2, to istnieją: baza (v_1, v_2) przestrzeni K^2 i krata M' jednokładna z kratą M, takie że $L = \mathcal{O}v_1 + \mathcal{O}v_2$, $M' = \mathcal{O}v_1 + \pi^m \mathcal{O}v_2$. Jak wyraża się $d([L], [M])$ przez m?
4. Jak uogólnić poprzednie zadanie na przypadek K^n? Z takiego uogólnienia wywnioskuj, że każde dwa wierzchołki budynku leżą we wspólnym apartamencie.
5. Sprawdź bezpośrednio, że w drzewie grupy $SL(2, K)$ nie ma cykli.
6. Uzasadnij, że budynek grupy $SL(n, K)$ pochodzi od BN-pary w tej grupie; opisz B, N, T, W, S.
7. Opisz czworościany $\tilde{A}_3$, $\tilde{B}_3$, $\tilde{C}_3$. Które ich wierzchołki są specjalne?
8. Wyprowadź mocną własność CAT(0) ze słabej.
9. Udowodnij, że budynek euklidesowy jest przestrzenią zupełną. [Wsk. może pomóc rozważenie "totalnego foldingu" odwzorowującego cały budynek na jeden pokój.]
10. Uzasadnij, że w afinicznej grupie Coxetera stabilizator dowolnego wierzchołka pokoju wkłada się w $\overline{W}$ (liniową część grupy Coxetera). Zauważ, że w takim razie można rozpoznać wierzchołki specjalne po rozmiarze ich stabilizatorów.
11. * Rozpoznaj wierzchołki specjalne $\tilde{F}_4$ (wskaż kropy w diagramie Dynkina odpowiadające panelom leżącym naprzeciw takich wierzchołków)
12. Wytłumacz jak skonstruować automorfizm drzewa grupy $SL(2, \mathbf{Q}_p)$ nie pochodzący od żadnego elementu tej grupy. [Wsk. format odpowiedzi ma być następujący: Na kuli o promieniu ... wokół wierzchołka ... robimy co następuje (tu bardzo dokładny opis), a potem rozszerzamy byle jak do automorfizmu.]