Budynki Titsa, lista 7

1. Udowodnij lemat o odtwarzaniu drzewa z waluacji projektywnej.
2. Niech wektory $w, w' \in \mathbf{Q}_p^2$ będą liniowo niezależne; przypiszmy końcowi drzewa grupy $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ będącego granicą ciągu ciągu $\mathbf{Z}_p w + p^n \mathbf{Z}_p w'$ prostą $\mathbf{Q}_p w \in \mathbf{P}^1(K)$. Uzasadnij, że przyporządkowanie to jest dobrze określone i ustala bijekcję między zbiorem końców drzewa będącego budynkiem grupy $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ a zbiorem punktów prostej rzutowej $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Czy to samo będzie prawdą jeśli $\mathbf{Q}_p$ zastąpić innym ciałem z waluacją (dyskretną)?
3. Sprawdź, że przekształcenie $K \ni a \mapsto K\binom{a}{1} \in \mathbf{P}^1(K)$ uzupełnione regułą $\infty \mapsto \binom{1}{0}$ ustala bijekcją $K \cup \{\infty\} \to \mathbf{P}^1(K)$ przeplatającą działania $SL_2(K)$: przez homografie i przez przekształcenia rzutowe (tzn. przekształcenia $\mathbf{P}^1(K)$ indukowane przez przekształcenia liniowe).
4. Definiujemy dwustosunek na zbiorze czwórek różnych punktów z $K \cup \{\infty\}$ następującą regułą: $[a, b; c, d]$ to obraz d przez jedyną homografię przeprowadzającą a w ∞, b w 0 zaś c w 1. Uzasadnij, że ta definicja jest poprawna; wyprowadź jawny wzór; udowodnij, że dwustosunek jest niezmienniczy na homografie. Opisz jak zmienia się dwustosunek czwórki gdy ją permutujemy.
5. Dwa z poprzednich zadań mówią łącznie jak utożsamić zbiór końców drzewa grupy $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ z $\mathbf{Q}_p \cup \{\infty\}$; wykaż, że przy tym utożsamieniu geometrycznie zdefiniowana na wykładzie waluacja projektywna odpowiada waluacji p-adycznej dwustosunku.
6. Laplasjan na skończonym grafie Γ definiujemy tak:

$$(\Delta f)(v) = f(v) - \frac{1}{\#N(v)} \sum_{w \in N(v)} f(w).$$

   f oznacza tu funkcję na zbiorze $V(\Gamma)$ wierzchołków grafu, $N(v)$ to zbiór sąsiadów wierzchołka v. Rozważmy na $V(\Gamma)$ miarę $\mu(v) = \#N(v)$. Uzasadnij, że Δ jest samosprzężonym nieujemnie określonym operatorem na $L^2(V(\Gamma), \mu)$. Opisz jądro Δ.
7. Niech Γ będzie grafem skończonym, spójnym i dwudzielnym. Niech V_0 i V_1 oznaczają zbiory wierzchołków typu 0 i 1 odpowiednio; zakładamy, że wierzchołki typu i mają wszystkie walencję $q_i + 1$. Niech $L^2(E)$ oznacza przestrzeń funkcji na zbiorze E krawędzi grafu Γ z normą L^2 względem miary liczącej. Zauważ, że $\iota_i\colon L^2(V_i, \mu) \to L^2(E)$ dane przez: $\iota_i(f)(e) =$ wartość f na wierzchołku e typu i; jest izometrycznym włożeniem. Niech $f \in L^2(V(\Gamma), \mu)$, $f_i = \iota_i(f|_{V_i})$. Uzasadnij, że

$$\langle \Delta f, f \rangle \geq (1 - \epsilon)\|f\|^2 \iff 2\mathrm{Re}\langle f_0, f_1 \rangle \leq \epsilon(\|f_0\|^2 + \|f_1\|^2).$$

   Wywnioskuj stąd, że jeśli najmniejsza dodatnia wartość własna Δ jest większa niż $1 - \epsilon$, to

$$\iota_0(L^2(V_0)) \cap L_0^2(E) \perp_\epsilon \iota_0(L^2(V_0)) \cap L_0^2(E).$$

8. Znajdź spektrum Δ dla grafu incydencji $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$. [wsk. Rozważ operator uśredniania po sąsiadach: to, co w definicji Δ stoi po minusie.]
9. Uzasadnij, że jeśli grupa dyskretna ma własność Każdana, to ma skończony zbiór generatorów. [Wsk. Rozważ reprezentacje G na $L^2(G/\langle S \rangle)$.]