

Kohomologie, lista 2

1. Uzasadnij, że jeśli $Z \subseteq \overline{Z} \subseteq \text{int}(A) \subseteq A \subseteq X$, to $H^p(X, A; G) \cong H^p(X \setminus Z, A \setminus Z; G)$.
2. Uzasadnij, że jeśli X jest CW-kompleksem, to $H^*(X, G) \cong H_{\text{CW}}^*(X, G)$.
3. Rozstrzygnij, czy jeśli odwzorowania $f, g: X \rightarrow Y$ indukują te same homomorfizmy $f_* = g_*: H_*X \rightarrow H_*Y$ to muszą też, dla wszelkich abelowych G , indukować te same homomorfizmy $f_* = g_*: H_*(X, G) \rightarrow H_*(Y, G)$.
4. Udowodnij, że $H^1(X, \mathbf{Z})$ jest grupą beztorsyjną.
5. Załóżmy, że grupa H_*X jest skończenie generowana. Udowodnij, że wówczas dla dowolnego ciała K zachodzi

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim_K H^p(X, K).$$

6. Do okręgu S^1 przyklejono dysk D^2 przez odwzorowanie $\partial D^2 \rightarrow S^1$ stopnia 9. Oblicz homologie otrzymanej przestrzeni o współczynnikach $\mathbf{Z}/3$, $\mathbf{Z}/6$, $\mathbf{Z}/9$.

Zadania nieobowiązkowe – dla tych, którzy naprawdę nie lubią iloczynu tensorowego; czyli krótka powtórka z algebry przemiennej. Wszystko poniżej to grupy abelowe lub, ogólniej, moduły nad ustalonym pierścieniem.

7. Funktory $\cdot \otimes B$ i $\text{Hom}(B, \cdot)$ są sprzężone:

$$\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C)).$$

8. Ciąg

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

jest dokładny $\iff$ dla każdego C indukowany ciąg

$$\text{Hom}(X, C) \leftarrow \text{Hom}(Y, C) \leftarrow \text{Hom}(Z, C) \leftarrow 0$$

jest dokładny.

9. Ciąg

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

jest dokładny $\iff$ dla każdego C indukowany ciąg

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, X) \rightarrow \text{Hom}(C, Y) \rightarrow \text{Hom}(C, Z)$$

jest dokładny.

10. Wywnioskuj pódokładność funktora $\cdot \otimes B$ z pódokładności funktora $\text{Hom}(\cdot, B)$.