

Kohomologie, lista 3

Zadanie 2.a jest przeznaczone do rozwiązywania po dowodzie tw. Eilenberga–Zilbera. Litera R oznacza pierścień (przemienny, z jedyneką), X i Y to przestrzenie topologiczne.

1. Wyznacz grupy kohomologii $\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2$.
2. *Aproksymacją diagonalną* nazywamy naturalne odwzorowanie łańcuchowe $D: C_*X \rightarrow C_*X \otimes C_*X$ spełniające $D(x) = x \otimes x$ dla punktów $x \in X$ (traktowanych jako elementy C_0X).
 - a) Udowodnij, że każde dwie aproksymacje diagonalne są naturalnie łańcuchowo homotopijne.
 - b) Uzasadnij, że złożenie odwzorowania $\Delta_*: C_*X \rightarrow C_*(X \times X)$ (indukowanego odwzorowaniem diagonalnym $\Delta: X \ni x \mapsto (x, x) \in X \times X$) i odwzorowania Eilenberga–Zilbera $EZ: C_*(X \times X) \rightarrow C_*X \otimes C_*X$ jest aproksymacją diagonalną.
 - c) Dla sympleksu singularnego $\sigma: \Delta^n = [e_0, \dots, e_n] \rightarrow X$ oznaczamy przez ${}_p\sigma$ *przednią p -ścianę* (czyli $\sigma|_{[e_0, \dots, e_p]}$), a przez σ_q *tylną q -ścianę* (czyli $\sigma|_{[e_{n-q}, \dots, e_n]}$). *Aproksymacja diagonalna Alexandera–Whitney’a* AW jest dana (na bazie) wzorem

$$AW(\sigma) = \sum_{p+q=|\sigma|} {}_p\sigma \otimes \sigma_q.$$

Sprawdź, że wzór ten naprawdę określa aproksymację diagonalną.

3. Odwzorowanie $\otimes: C^p(X, R) \times C^q(Y, R) \rightarrow \text{Hom}(C_*X \otimes C_*Y, R)$ definiujemy wzorem

$$(\alpha \otimes \beta)(\sigma \otimes \tau) = \begin{cases} \alpha(\sigma)\beta(\tau) & \text{jeśli } |\sigma| = p, |\tau| = q, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Uzasadnij, że wzór ten określa naturalne odwzorowanie łańcuchowe

$$C^*(X, R) \otimes C^*(Y, R) \rightarrow \text{Hom}(C_*X \otimes C_*Y, R),$$

a w efekcie również mnożenie kohomologiczne

$$\otimes: H^p(X, R) \otimes H^q(Y, R) \rightarrow H^{p+q}(\text{Hom}(C_*X \otimes C_*Y, R))$$

oraz *kohomologiczny iloczyn krzyżowy*

$$\times: H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R) \rightarrow H^*(\text{Hom}(C_*X \otimes C_*Y, R)) \xrightarrow{EZ^*} H^*(X \times Y, R).$$

Uzasadnij, że ten ostatni nie zależy od wyboru odwzorowania Eilenberga–Zilbera.

4. Określamy *cup-produkt* $\cup$ jako mnożenie w $H^*(X, R)$ wzorem

$$\alpha \cup \beta := \Delta^*(\alpha \times \beta)$$

(Δ jak w zadaniu 1.b). Alternatywnie, dla aproksymacji diagonalnej D i indukowanego przezeń odwzorowania $D^*: H^*(X \times X, R) \rightarrow H^*(X, R)$ możemy zdefiniować

$$\alpha \cup \beta := D^*(\alpha \otimes \beta).$$

Uzasadnij, że obie definicje nie zależą od dokonywanych w nich wyborów i są ze sobą zgodne.

5. Dla kołańcuchów $\varphi \in C^p(X, R)$, $\psi \in C^q(X, R)$ określamy kołańcuch

$$(AW) \quad \varphi \cup \psi \in C^{p+q}(X, R), \quad (\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma_p) \psi(\sigma_q).$$

Uzasadnij, że jeśli φ, ψ są kocyklami, to $\varphi \cup \psi$ też jest kocyklem, oraz $[\varphi \cup \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$.

6. Niech X będzie Δ -kompleksem. Uzasadnij, że wzór (AW) określa mnożenie w kohomologiach symplicjalnych $H_{\Delta}^*(X, R)$ zgodne z $\cup$ -produktem w kohomologiach singularnych $H^*(X, R)$ przy naturalnym izomorfizmie $H_{\Delta}^*(X, R) \simeq H^*(X, R)$.
7. Wylicz symplicjalnie $\cup$ w $H^*(\mathbf{R}P^2)$, $H^*(\mathbf{R}P^2, \mathbf{Z}/2)$, $H^*(T^2)$, $H^*(T^2 \# T^2)$, etc.