

Kohomologie, lista 4

1. Sprawdź, że komórkowy kompleks łańcuchowy produktu CW-kompleksów $C_*^{CW}(X \times Y)$ jest izomorficzny z $C_*^{CW}(X) \otimes C_*^{CW}(Y)$.
2. Udowodnij, że $\times: H^*X \otimes H^*Y \rightarrow H^*(X \times Y)$ jest homomorfizmem algebr.
3. Udowodnij, że $\times: H^*(\mathbf{R}P^n, \mathbf{Z}/2) \otimes H^*(\mathbf{R}P^n, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}P^n, \mathbf{Z}/2)$ jest izomorfizmem algebr. (Wsk. użyj struktury komórkowej.)
4. Wyznacz algebry kohomologii $\mathbf{C}P^n$, $\mathbf{H}P^n$, torusa T^n . (Współczynniki całkowite.)
5. Uzasadnij, że pierścień kohomologii produktu n kopii $\mathbf{C}P^\infty$ jest izomorficzny z pierścieniem wielomianów n zmiennych.
6. Udowodnij, że wiersze podwójnego kompleksu singularnego Čecha związanego ze skończonym lub przeliczalnym pokryciem otwartym $\mathcal{U} = \{U_i\}$ przestrzeni M

$$0 \rightarrow C_{\mathcal{U}}^q M \rightarrow \prod_i C^q(U_i) \rightarrow \prod_{i < j} C^q(U_i \cap U_j) \rightarrow \dots$$

są dokładne:

- a) Przez indukcję ze względu na liczbę elementów pokrycia pokaż dokładność odpowiedniego ciągu łańcuchowego:

$$0 \leftarrow C_{\mathcal{U}}^q M \leftarrow \bigoplus_i C_q(U_i) \leftarrow \bigoplus_{i < j} C_q(U_i \cap U_j) \leftarrow \dots$$

- b) Uzasadnij, że funktor $\text{Hom}(-, \mathbf{Z})$ przekształca dokładny ciąg wolnych grup abelowych na ciąg dokładny.
7. Sprawdź, że mnożenie w kompleksie Čecha–de Rhama spełnia regułę Leibniza.