

Kohomologie, lista 5

1. Uzasadnij, że granica prosta ciągów dokładnych jest ciągiem dokładnym.
2. Sprawdź zgodność dwóch definicji kohomologii o zwartych nośnikach:

$$H^*(C_c^*X, \delta) = \lim_K H^*(M|K).$$

3. Niech $a \in H_c^n M$ będzie reprezentowana przez klasę $\alpha \in H^n(M|K)$, i niech $\mu_K \in H_n(M|K)$ będzie klasą pochodzącą od ustalonej orientacji zorientowanej rozmaitości M . Uzasadnij, że liczba $\langle \alpha, \mu_K \rangle$ nie zależy od dokonanych wyborów (czyli wyborów K i α).
4. Załóżmy, że M jest gładką rozmaitością. Przedyskutuj związek dwóch definicji orientacji: różniczkowej i homologicznej.
5. Czy w twierdzeniu o istnieniu klasy fundamentalnej (klasy orientacji) $\mu_K \in H^n(M|K)$ istotne jest założenie, że M jest przestrzenią Hausdorffa? (Spróbuj skonstruować taką klasę w $\mathbf{R}$ z podwojonym zerem.)

Definiujemy $\cup$ -iloczyn (*cup-product*), liniowe odwzorowanie

$$C^k X \otimes C_n X \ni (b, \xi) \rightarrow b \cap \xi \in C_{n-k} X,$$

wzorem

$$b \cap \sigma = \langle b, \sigma_k \rangle \cdot {}_{n-k}\sigma$$

w przypadku gdy $\xi = \sigma$ jest n -sympleksem singularnym w X .

6. Sprawdź, że łańcuch $b \cap \xi$ jest jedynym łańcuchem spełniającym warunek

$$\forall a \in C^{n-k} X \quad \langle a, b \cap \xi \rangle = \langle a \cup b, \xi \rangle.$$

(W tym wzorze $a \cup b$ określamy formułą Alexandera–Whitneya.)

7. Uzasadnij następujące własności $\cup$ -produktu:
 - a) $(b \cup c) \cap \xi = b \cap (c \cap \xi)$,
 - b) $1 \cap \xi = \xi$,
 - c) $\partial(b \cap \xi) = b \cap \partial\xi + (-1)^{n-k} \delta b \cap \xi$.
8. Uzasadnij, że $\cap$ -produkt zadaje iloczyn po przejściu do (ko)homologii:

$$\cap: H^k X \otimes H_n X \rightarrow H_{n-k} X.$$

Przedyskutuj wersje relatywne:

$$H^k(X, A) \otimes H_n(X, A) \rightarrow H_{n-k} X, \quad H^k(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \rightarrow H_{n-k}(X, B).$$

9. Niech $f: X \rightarrow Y$, $b \in H^k Y$, $\xi \in H_n X$. Uzasadnij, że

$$f_*(f^*b \cap \xi) = b \cap f_*\xi.$$

10. Użyj dualności Poincarégo by wyliczyć strukturę mnożącą na znanych Ci addytywnie kohomologiach $\mathbf{C}P^n$, $\mathbf{H}P^n$ i $\mathbf{R}P^n$ (tej ostatniej ze współczynnikami $\mathbf{Z}/2$).
11. Niech $\omega, \eta \in \Omega^k M^n$ będą zamknięte ($d\omega = d\eta = 0$). Załóżmy też, że dla pewnej zwartej zorientowanej podrozmaitości $N^k \subset M^n$ zachodzi $\int_N \omega \neq \int_N \eta$. Uzasadnij, że wtedy $[\omega] \neq [\eta]$ (w $H_{DR}^k M$).
12. Uzasadnij, że algebra $H^*(T^n, \mathbf{R})$ jest izomorficzna z algebrą zewnętrzną $\Lambda^*(\mathbf{R}^n)^*$:
 - a) Z elementem $a \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$ zwiąż “stałą” k -formę $\omega_a \in \Omega^k T^n$ na $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$; pokaż, że $d\omega_a = 0$.
 - b) Użyj poprzedniego zadania by udowodnić, że jeśli $a \neq b$, to $[\omega_a] \neq [\omega_b]$.
 - c) Uzasadnij, że zbudowane włożenie $\Lambda^*(\mathbf{R}^n)^* \rightarrow H_{DR}^* T^n$ jest surjektywne – wykorzystaj tw. de Rham’a i znane Ci addytywnie (ko)homologie singularne T^n .