

Funkcje analityczne R. Lista 2

$[a, b]$ oznacza odcinek od a do b , zaś $[a, b, c, \dots]$ łamaną o kolejnych wierzchołkach a, b, c, \dots

Podstawy

1. Całkę $\int_{\gamma} f(z)dz$ można przybliżać sumami postaci $\sum_{k=0}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$, gdzie (z_k) jest ciągiem punktów wybranych wzdłuż krzywej γ możliwie gęsto. Spróbuj precyzyjnie zdefiniować całkę $\int_{\gamma} f(z)dz$ jako granicę takich sum (przy swoich ulubionych założeniach o γ) i pokaż zgodność swojej definicji z definicją z wykładu.
2. Rozpisując $f = u + iv$, $dz = dx + idy$ wyraż $\int_{\gamma} f(z)dz$ przez rzeczywiste całki krzywoliniowe. Załóżmy, że krzywa γ obiega brzeg obszaru U (z takimi założeniami, jak w znanej Ci wersji tw. Greene'a), a funkcje u, v są C^1 i spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna na pewnym otwartym zbiorze zawierającym \bar{U} . Wynioskuj z tw. Greene'a, że $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.
3. Uzasadnij precyzyjnie, że dla zespolonej funkcji ciągłej $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ zachodzi

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

4. Dla krzywej $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ i ciągłej funkcji $f: \gamma^* \rightarrow \mathbf{C}$ określamy

$$\int_{\gamma} f(z)|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Zbadaj, czy ta całka jest zależna od parametryzacji γ . Uzasadnij, że $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)||dz|$.

5. Uzasadnij, że jeśli ciąg funkcji (f_n) zbiega do f jednostajnie na γ^* , to $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$.
6. Pokaż, że nie istnieje ciąg wielomianów zmiennej z zbieżny jednostajnie do funkcji $1/z$ w pierścieniu $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ (Wsk. $\int_{|z|=3/2} \frac{dz}{z}$)
7. Tw. Weierstrassa mówi, że ciągła funkcja na $[0, 1]$ może być jednostajnie przybliżana wielomianami. Czy każda ciągła funkcja na domkniętym kole może być jednostajnie przybliżana wielomianami zmiennej z ?

Przykłady

8. Oblicz $\int_{\partial B(0,R)} z^n dz$ dla $n \in \mathbf{Z}$.
9. Oblicz $\int_{\Gamma} (\bar{z} + z^2 \bar{z})dz$, gdzie Γ to brzeg kwadratu o środku 0 i bokach długości 2 równoległych do osi.
10. Oblicz całki

$$\int_{|z+2|=1} (z + z^{-1})dz, \quad \int_{|z-1-i|=1} (z + z^{-1})dz, \quad \int_{[1,i]} (z + z^{-1})dz.$$

11. Oblicz całki

$$\int_{[0,i]} z \sin z dz, \quad \int_{[1,i,-1,-i,1]} z^{-1} dz.$$

12. Oblicz całki

$$\int_{x^2+4y^2=1} \frac{dz}{1+z^2}, \quad \int_{|z-2-i|=\sqrt{2}} \frac{e^z \cos z dz}{(1+z^2) \sin z}.$$