Funkcje analityczne R. Lista 5

Morera i wnioski

1. Niech f bedzie funkcją ciągłą na obszarze Ω. Załóżmy, że dla wszystkich domkniętych trójkątów zawartych w Ω i o średnicy mniejszej niż $1/100$ zachodzi $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. Uzasadnij, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
2. Niech f bedzie funkcją ciągłą na obszarze Ω i holomorficzną w $\Omega \setminus \{z_0\}$. Udowodnij, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
3. Niech F będzie ciągłą funkcją na $\Omega \times [a,b]$ holomorficzną względem pierwszego argumentu i niech $f(z) = \int_a^b F(z,s)ds$. Udowodnij, że
$$f'(z) = \int_a^b \frac{d}{dz} F(z,s)ds.$$
4. Otwarty trójkąt T jest przekrojem trzech otwartych półpłaszczyzn Π_1, Π_2, Π_3, a $\varphi \in \mathcal{O}(T)$. Załóżmy, że istnieje rozszerzenie φ do funkcji $\Phi \in C(\overline{T})$. Czy można przedstawić φ w postaci sumy trzech funkcji – ograniczeń do T funkcji holomorficznych w półpłaszczyznach Π_1, Π_2, Π_3 ?

Przykłady funkcji z szeregów i całek

5. Niech $f(z) = \int_0^1 \frac{\sin(tz)}{t} dt$. Uzasadnij, że $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$.
6. Rozważ całkę $\int_n^{n+1} x^{-s-1} dx$ by pokazać, że dla $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ i $n \in \mathbf{N}$ zachodzi
$$|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leq \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}).$$
7. Udowodnij, że jeśli sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są wspólnie ograniczone, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ jest zbieżny niemal jednostajnie w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s) > 0$. (Wsk. sumowanie Abela)
8. Rozpatrując funkcję $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ rozszerzyliśmy funkcję ζ do funkcji holomorficznej na zbiorze
$$\mathbf{C}_{\mathrm{Re}>0} \setminus \{1 + k\frac{2\pi i}{\log 2} \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$
W podobny sposób rozpatrz funkcję $(3^{1-s} - 1)\zeta(s)$ i rozszerz ζ do zbioru
$$\mathbf{C}_{\mathrm{Re}>0} \setminus \{1 + k\frac{2\pi i}{\log 3} \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$
Następnie połącz oba rozszerzenia i rozszerz ζ do funkcji holomorficznej w $\mathbf{C}_{\mathrm{Re}>0} \setminus \{1\}$.
9. Uzasadnij, że $\lim_{s \to 1+} \zeta(s) = \infty$.
10. Uzasadnij, że dla $m \in \mathbf{Z}_{\leq 0}$ zachodzi $\lim_{s \to m} \Gamma(s) = \infty$.
11. Na $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ rozważamy funkcję $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n}$ – dokładniej, definiujemy
$$f(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}.$$
   a) Uzasadnij, że ciąg $\left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}\right)_{N=0}^{\infty}$ jest niemal jednostajnie zbieżny w $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$.
   b) Uzasadnij, że f spełnia równanie $f(z) = f(z+1)$.
   c) Naszkicuj wykres f na przedziale $[0,1]$.

Analityczna jednoznaczność

12. Niech $f, g \in \mathcal{O}(B(0,1))$ będą niezerującymi się funkcjami. Załóżmy, że $\frac{f'}{f}(\frac{1}{n}) = \frac{g'}{g}(\frac{1}{n})$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Udowodnij, że f/g jest stała.

Zasada odbicia Schwarza

13. Załóżmy, że f jest funkcją holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie, oraz że $f(z)$ zbiega jednostajnie do 0 w pasie $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ gdy $\mathrm{Im}(z) \to 0$. (Tzn. $\lim_{\epsilon\to 0+} \sup_{x\in(0,1)} |f(x+i\epsilon)| = 0$.) Udowodnij, że $f \equiv 0$.

14. Załóżmy, że f jest niezerującą się ciągłą funkcją na $\overline{B(0,1)}$, holomorficzną w $B(0,1)$. Ponadto załóżmy, że $|f(z)| = 1$ o ile $|z| = 1$. Udowodnij, że f jest stała. (Wsk. rozszerz f do $\mathbf{C}$ wzorem $f(z) = 1/\overline{f(\overline{z})}$.)

Krzywa na płaszczyźnie jest *rzeczywista analityczna,* jeśli w otoczeniu każdego swego punktu może być opisana jako wykres funkcji rzeczywistej analitycznej – funkcji rzeczywistej zadanej zbieżnym na pewnym przedziale szeregiem potęgowym.

15. Uzasadnij, że krzywa rzeczywista analityczna może być w otoczeniu każdego swego punktu sparametryzowana wzorem postaci $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto f(t) \in \mathbf{C}$, gdzie $f \in \mathcal{O}(B(0,\epsilon))$.

16. Niech Ω_1 i Ω_2 będą ograniczonymi obszarami w $\mathbf{C}$, których brzegi są krzywymi rzeczywistymi analitycznymi. Załóżmy, że $f\colon \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$ jest ciągła, holomorficzna w Ω_1, i przekształca brzeg Ω_1 w brzeg Ω_2.
    a) Udowodnij, że dla każdego $p \in \partial\Omega_1$ istnieją: $r > 0$ i holomorficzna $\phi\colon B(p,r) \to \mathbf{C}$, takie że na $\Omega_1 \cap B(p,r)$ funkcje f i ϕ są równe.
    b) Udowodnij, że istnieją: otwarty zbiór $U \subseteq \mathbf{C}$ zawierający $\overline{\Omega}_1$ i funkcja $\Phi \in \mathcal{O}(U)$, takie że obcięcie Φ do Ω_1 pokrywa się z f.

Kącik całkowy

17. Oblicz całki:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}dx, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$$