Funkcje analityczne R. Lista 6

Runge

1. Udowodnij, że istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do 1 w $B(4,1) \cup B(-4,1)$ i jednocześnie zbieżny jednostajnie do -1 w $B(4i,1) \cup B(-4i,1)$.
2. Udowodnij, że istnieje ciąg wielomianów zbieżny niemal jednostajnie do 0 na górnej półpłaszczyźnie, który jednocześnie nie jest nawet punktowo zbieżny w żadnym punkcie dolnej półpłaszczyzny.
3. Udowodnij, że istnieje ciąg wielomianów, który dla każdej liczby wymiernej $q \in [0,2)$ zbiega niemal jednostajnie na promieniu $\{re^{i\pi q} \mid r > 0\}$ do liczby q.
4. Załóżmy, że $|z_0| > R$. Udowodnij, że dowolny wielomian (od z) można przybliżać jednostajnie na $B(0,R)$ wielomianami od $\frac{1}{z-z_0}$.
5. Udowodnij następujący wariant tw. Rungego. Niech $K \subseteq \mathbf{C}$ będzie zwarty, a f niech będzie holomorficzna w pewnym otoczeniu K. Załóżmy, że zbiór $S \subseteq \mathbf{C}$ na niepuste przecięcie z każdą składową $\mathbf{C} \setminus K$. Wtedy f można przybliżać jednostajnie na K funkcjami wymiernymi o osobliwościach w S i skończonej granicy w nieskończoności.
6. Załóżmy, że funkcje ciągłe f, g są określone na zwartym zbiorze $K \subseteq \mathbf{C}$. Załóżmy też, że f przybliża się jednostajnie na K wielomianami od g. Udowodnij, że wtedy każdy wielomian od f przybliża się jednostajnie na K wielomianami od g.
[Znaczkami: $(\forall P(z) \in \mathbf{C}[z])(\forall \epsilon > 0)(\exists Q(z) \in \mathbf{C}[z])(\forall w \in K)(|P(f(w)) - Q(g(w))| < \epsilon)$.]
7. Czy istnieje ciąg wielomianów, który:
   a) w $B(0,1)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej 1, a w obszarze $\mathbf{C} \setminus \overline{B}(0,1)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej 0?
   b) w $B(0,1)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej 1, a w $\mathbf{C} \setminus (\overline{B}(0,1) \cup \mathbf{R}_+)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej 0?
   c) w $B(0,1)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji stałej równej 1, a w obszarze $\mathbf{C} \setminus \overline{B}(0,1)$ jest punktowo zbieżny do funkcji stałej równej 0?

Zasada maksimum

8. Znajdź maksimum i wszystkie punkty, dla których jest ono przyjęte dla:
   a) $|\cos z|$ na kwadracie $\operatorname{Re} z \in [0, 2\pi]$, $\operatorname{Im} z \in [0, 2\pi]$;
   b) $|e^z|$ na $\overline{B}(0,1)$;
   c) $|z^{-1}e^z|$ na kwadracie $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$.
9. Znajdź maksimum funkcji $|(2z-1)^3|$ na prostokącie $|\operatorname{Re} z| \leq 4$, $|\operatorname{Im} z| \leq 1$.
10. Znajdź $\min\{x^3 - 3xy^2 \mid |x|, |y| \leq 1\}$ (skorzystaj z $x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}((x+iy)^3)$).
11. Niech f, g będą funkcjami holomorficznymi w ograniczonym obszarze Ω i ciągłymi na $\overline{\Omega}$. Udowodnij, że jeśli $f(z) = g(z)$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$, to $f = g$.
12. Jeśli f jest ciągła w $\overline{B(0,1)}$, holomorficzna w $B(0,1)$ i rzeczywista na $\partial B(0,1)$, to jest stała.
13. Niech f bedzie niestałą funkcją holomorficzną na obszarze Ω. Udowodnij, że jeśli $|f|$ przyjmuje w $z_0 \in \Omega$ minimum lokalne, to $f(z_0) = 0$.
14. Uzasadnij, że jeśli D jest domkniętym kołem, f funkcją holomorficzną na pewnym otwartym zbiorze zawierającym D, zaś a tym punktem D, w którym $|f|$ osiąga swe maksimum na D, to $f'(a) \neq 0$. Podaj przykład pokazujący, że jeśli D jest kwadratem to tak być nie musi.

Kącik całkowy

15. Dla $a > 0$ oblicz
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$