Funkcje analityczne R. Lista 7

Rozwinięcia Laurenta

1. Rozwiń w szereg Laurenta (w bezpośrednim otoczeniu wskazanych punktów):
   a) $\frac{1}{z-1}$ w $z = 0$ i $z = 1$;
   b) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w $z = 1$, $z = 2$ i $z = 0$;
   c) $e^{-z} + \sin(z)$ w $z = 0$;
   d) $z^7 e^{z^{-2}}$ w $z = 0$.
2. Rozwiń funkcję $\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ w szeregi postaci $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Ile istnieje takich rozwinięć? Z jakim obszarem jest związanie każde z nich?
3. Na cześć Fibonacciego rozwiń $\frac{1}{z^2-z-1}$ w szereg Laurenta wokół 0.
4. Niech $0 < r < R$, i niech $\Omega_1 = \{x+iy \mid (|x| > r) \vee (|y| > r)\}$, $\Omega_2 = \{x+iy \mid |x|, |y| < R\}$. Udowodnij, że każdą funkcję $f \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ można przedstawić w postaci $f_1 + f_2$ dla pewnych $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ spełniających $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$.

Osobliwości

5. Określ typy osobliwości podanych funkcji (uwzględniając ∞):
$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, \qquad \frac{z}{\sin z}, \qquad z\cos\frac{1}{z}, \qquad \exp\left(\mathrm{tg}\frac{1}{z}\right), \qquad \frac{z+1}{z^2-2i}, \qquad \exp\frac{z}{1-z},$$
6. Udowodnij, że funkcja całkowita, której osobliwość w ∞ nie jest istotna, jest wielomianem.
7. Wykaż, że jeśli f ma w z biegun rzędu m, a P jest wielomianem stopnia n, to $P \circ f$ ma w z biegun rzędu mn.
8. Uzasadnij, że jeśli f jest holomorficzna w obszarze Ω, to $1/f$ jest meromorficzna w Ω (lub $f \equiv 0$).
9. Czy istnieje:
   a) funkcja $f \in \mathcal{O}(B'(0,1))$ spełniająca nierówność $|f(z)| > \exp(1/|z|)$?
   b) funkcja całkowita f spełniająca nierówność $|f(z)| > \exp(|z|)$?

10*. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(B'(0,1))$. Udowodnij, że jeśli $\iint_{B'(0,1)} |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty$, to f ma w 0 osobliwość pozorną.

11. Niech $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ będzie obszarem, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ funkcją niestałą. Uzasadnij, że rozszerzenie f do ciągłego odwzorowania $\Omega \to \overline{\mathbf{C}}$ jest odwzorowaniem otwartym.

Residua

12. Wyznacz residua funkcji
$$\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}, \qquad \frac{e^z}{z(z-1)}, \qquad \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}, \qquad \frac{1}{\sin z}, \qquad \mathrm{ctg} z, \qquad \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}.$$
13. Udowodnij, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\partial B(0,n+\frac{1}{2})} \frac{\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)}{(z+u)^2} dz = 0.$
14. Niech $K(a)$ będzie kwadratem $\{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \le a\}$
   a) Udowodnij, że dla N całkowitego dodatniego
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(\pi(N+\frac{1}{2}))} \frac{dz}{z^2\sin z} = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$
   Wywnioskuj wzór $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
   b) Udowodnij, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. W tym celu scałkuj $\frac{\mathrm{tg} z}{z^2}$ po brzegu $K(\pi N)$.
15. Załóżmy, że funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu z_0 i $g'(z_0) \neq 0$, zaś funkcja f ma w $g(z_0)$ biegun rzędu n. Uzasadnij, że wtedy $f \circ g$ ma w z_0 biegun rzędu n. Udowodnij też, że jeśli $n = 1$, to $\operatorname{Res}(f \circ g, z_0) = \frac{1}{g'(z_0)} \operatorname{Res}(f, g(z_0))$.

Kącik całkowy

16. Oblicz całki:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1} dx.$$