Funkcje analityczne R. Lista 9

Indeks i twierdzenie Cauchy'ego

1. Narysuj zamknięta krzywą. Dla każdej składowej jej dopełnienia wyznacz indeks punktu składowej względem krzywej. Postaraj się, by w Twoim przykładzie pojawiły się indeksy $+3$ i -3.
2. Niech $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{2, -2\}$. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i że $\int_{\partial B(2,1)} f(z)dz = 7$, $\int_{\partial B(-2,1)} f(z)dz = 5$.
   a) Narysuj zamknięte krzywe γ, η w Ω, takie że $\int_\gamma f(z)dz = 1$, $\int_\eta f(z)dz = -3$.
   b) Jakie inne wartości całek f wzdłuż zamkniętych krzywych potrafisz uzyskać?
   c) Podaj przykład funkcji f spełniającej założenia zadania.
3. Dla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ określmy $\mathrm{Per}(f) = \{\int_\gamma f(z)dz \mid \gamma$ jest krzywą zamkniętą w $\Omega\}$. Zbadaj, jakim zbiorem może być $\mathrm{Per}(f)$, a jakim jego domknięcie – dla następujących Ω:
   a) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$;
   b) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$;
   c) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
   W każdym przypadku zilustruj swoje tezy odpowiednimi przykładami funkcji f.
4. Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu a i spełnia $g'(a) \neq 0$.
   a) Niech $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Uzasadnij, że $\mathrm{Ind}_{g\circ\gamma_r}(g(a)) = 1$ dla dostatecznie małych r.
   b) Załóżmy, że funkcja holomorficzna f ma izolowaną osobliwość w $g(a)$. Udowodnij, że
   $$\mathrm{Res}(f(z), g(a)) = \mathrm{Res}(f(g(z))g'(z), a).$$
5. Oblicz $\mathrm{Res}(\sin(\mathrm{ctg}(z)), 0)$.

Zasada argumentu

6. Udowodnij, że wszystkie pierwiastki wielomianu $z^5 - z^4 + 3z^2 - 20z + 15$ leżą w $B(0, 10)$.
7. Znajdź liczbę pierwiastków wielomianu $z^4 + 6z + 3$: (a) w $B(0, 2)$; (b) w pierścieniu $A(1, 2)$.
8. Udowodnij, że równanie $e^z = 3z^7$ ma 7 rozwiązań w $B(0, 1)$.
9. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(B(0, 2))$, $|f(z)| > 2$ dla $|z| = 1$, $f(0) = 1$. Czy f musi mieć zero w $B(0, 1)$?

Lemat Schwarza

10. Czy istnieje holomorficzna w kole jednostkowym funkcja f, taka że $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$ i $|f(z)| < 1$ gdy $|z| < 1$?
11. Niech $f\colon B(0, 1) \to B(0, 1)$ będzie holomorficzna. Udowodnij, że $|f'(0)| \leq 1$ – nawet jeśli $f(0) \neq 0$.
12. Załóżmy, że holomorficzna $f\colon B(0, 1) \to B(0, 1)$ spełnia $f(0) = 0$, ale nie jest obrotem. Udowodnij, że dla każdego $z \in B(0, 1)$ ciąg $(z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \ldots)$ jest zbieżny do 0.

Kącik całkowy

13. Oblicz (wsk. indented semi-circle):
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0).$$
14. Niech $a > b > 0$. Użyj podstawienia $z = e^{i\theta}$ by pokazać, że
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{iz(a + \frac{b}{2}(z + 1/z))}$$
i obliczyć tę całkę.