Funkcje holomorficzne

Definicja.
Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie otwarty, $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, $z_0 \in \Omega$.
Funkcję f nazywamy *holomorficzną* (lub: różniczkowalną w sensie zespolonym) w z_0, jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

(której wartość nazywamy pochodną f w z_0 i oznaczamy $f'(z_0)$).
Funkcja f jest holomorficzna w Ω ($f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeśli jest holomorficzna w każdym $z \in \Omega$.

Przykłady.

1. $f(z) = z^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2zh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2z+h = 2z$$

z^2 jest holomorficzna i ma pochodną $2z$

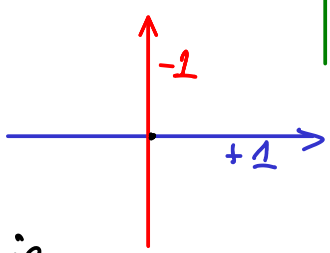
2. Podobnie: wielomiany, funkcje wymierne.
3. $f(z) = \overline{z}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{z}+\overline{h}-\overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h} = \ ?$$ nie istnieje

$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$

dla $h = x \in \mathbb{R}$: $\frac{\overline{x}}{x} = \frac{x}{x} = 1$

dla $h = iy,\ y \in \mathbb{R}$: $\frac{\overline{iy}}{iy} = \frac{-iy}{iy} = -1$



nie jest holomorficzna w żadnym punkcie

Własności – analogiczne jak w $\mathbf{R}$, łącznie z dowodami

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Warianty definicji

1. $\exists d \in \mathbf{C}$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|f(z+h)-f(z)-dh|}{|h|} = 0$

pewne otoczenie 0.

2. $\exists d \in \mathbf{C}$ $\quad f(z+h) = f(z) + dh + h\varphi(h)$ $\quad$ dla pewnej funkcji $\varphi\colon U \to \mathbf{C}$ takiej że $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$.

Różniczkowalność zespolona a rzeczywista

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} & & x+iy \\ \cap\!| & & \cong & & \updownarrow \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 & & (x,y) \end{array}$$

Można f zapisać jako

$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

dla $u,v : \Omega \to \mathbb{R}$

w zespolonej wersji:

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Rzeczywista różniczkowalność f w z:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(z+h)-f(z)-Lh\|}{\|h\|} = 0$$

dla pewnego przekształcenia liniowego $L\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zwanego pochodną, oznaczanego Df_z, o macierzy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(z)$$

Dla porównania, mnożenie przez liczbę zespoloną $d = a+bi$ jest $\mathbf{R}$-liniowe:
$d(x+iy) = (a+bi)(x+iy) =$ $(ax-by) + i\,(bx+ay)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(d = a+bi = u_x + i v_x \right)$$

Fakt
Następujące warunki są równoważne:
1. f jest holomorficzna w z;
2. f jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym w z i $m(Df_z)$ jest postaci $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$;
3. f jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym w z oraz

$$(CR) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(te dwie równości to tzw. równania Cauchy'ego–Riemanna).

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Definicja

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Uwaga.

$f = u + iv$ spełnia (CR) $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iu_y) + i\cdot\frac{1}{2}(v_x + iv_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + i\,\frac{1}{2}(u_y + v_x)$$

dokładnie gdy u,v spełniają CR. $\longrightarrow \; = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) + i\,\frac{1}{2}(v_x - iv_y) = \frac{1}{2}(\underbrace{u_x + v_y}_{= u_x}) + i\,\frac{1}{2}(\underbrace{-u_y + v_x}_{= v_x}) \overset{CR}{=} u_x + iv_x = f'(z)$$

Przykłady

1. $f(z) = z^2$ $\rightsquigarrow$ $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\cdot 2xy$, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$$u_x = 2x \qquad u_y = -2y$$
$$v_x = 2y \qquad v_y = 2x$$

równania CR są spełnione

u_x, u_y, v_x, v_y ciągłe

$\Rightarrow f$ holomorficzna.

2. $f(z) = \overline{z}$ $\rightsquigarrow$ $f(x+iy) = x - iy$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

$$u_x = 1 \qquad u_y = 0$$
$$v_x = 0 \qquad v_y = -1$$

CR nie zachodzą.

Szeregi potęgowe

Chodzi o szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Zbieżność tego szeregu dla $z = w$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla $z = w - z_0$.

Definicja

Promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (gdzie $a_n \in \mathbf{C}$) nazywamy liczbę $R \in [0, \infty]$ określoną wzorem

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Twierdzenie

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

a) jest zbieżny dla $|z| < R$;
b) jest rozbieżny dla $|z| > R$;
c) jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie w $B(0, R)$.

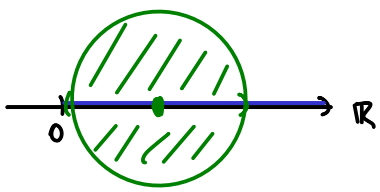
Przykłady

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $R=1$ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ dla $|z|<1$

2. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $R=\infty$

3. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $R=\infty$

4. $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$; $\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$ $R=1$



Dowód twierdzenia.

Załóżmy $0 < R < \infty$. Niech $L = \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

a) Jeśli $|z| < R$, to $|z| \cdot (L+\epsilon) = r < 1$ dla pewnego $\epsilon > 0$

Wtedy

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leqslant (L+\epsilon)^n \cdot |z|^n = r^n$$

dla dostatecznie dużych n

$(n \geq N)$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} r^n \leftarrow \text{zbieżny szereg liczb dodatnich}$$

$\sum a_n z^n$ zbiega bezwzględnie i jednostajnie w $B\left(0, \frac{r}{L+\epsilon}\right)$ - stąd C

b) Niech $|z| > R$; $|z|(L-\epsilon) > 1$ dla pewnego $\epsilon > 0$.

Istnieje podciąg a_{n_k} że $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > L - \epsilon$

$$|a_{n_k} z^{n_k}| = |a_{n_k}| |z|^{n_k} > (L-\epsilon)^{n_k} |z|^{n_k} > 1$$

wyraz ogólny szeregu nie dąży do 0 - nie ma zbieżności $\square$

Wniosek

Suma szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ o promieniu zbieżności R określa ciągłą funkcję $f\colon B(0,R) \to \mathbf{C}$.

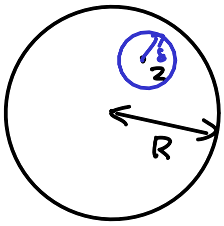
Twierdzenie

Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla $|z| < R$. Wtedy f jest holomorficzna w $B(0,R)$, a jej pochodna jest sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Dowód.

Szereg $\sum n a_n z^{n-1}$ ma promień zbieżności R. (bo $\sqrt[n]{n} \to 1$)

Niech $z \in B(0,R)$ i niech $\delta < R - |z|$



Dla $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum n a_n z^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underset{\overset{\|}{z^n + n z^{n-1} h + \dots}}{(z+h)^n} - \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |z|^k |h|^{n-k-1} =$$

$$= |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |z|^k |h|^{n-k-2} \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |z|^k \delta^{n-k-2} \leq$$

$$\leq |h| \cdot \delta^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-\cancel{2}} \binom{n}{k} |z|^k \delta^{n-k} \leq |h| \delta^{-2} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (\underbrace{|z| + \delta}_{\hat{R}})^n}_{\text{zbiega}} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\square$

Wniosek

Funkcja f w powyższym twierdzeniu jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w $B(0,R)$, a jej pochodne można obliczać różniczkując szereg wyraz po wyrazie.

Na brzegu koła zbieżności

Może być różnie:

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest rozbieżny dla każdego $z \in C(0,1)$.

$$C(0,R) = \partial B(0,R)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ zbiega dla $z \in C(0,1) \setminus \{1\}$

Sumowanie przez części / sumowanie Abela

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n - a_M B_{M-1} + a_N B_N, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$k=M$

Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$, $\quad b_n = z^n$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \;; \quad |B_n| \leqslant \frac{2}{|1-z|} = C$$

$|z|=1$

$$\left|\sum_{n=M}^{N} \frac{z^n}{n}\right| = \left|\sum_{n=M}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) B_n - \frac{1}{M} B_{M-1} + \frac{1}{N} B_N\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=M}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{\overset{\wedge\!\!\!|}{C}}{|B_n|} + \frac{1}{M} \underset{\overset{\wedge\!\!\!|}{C}}{|B_{M-1}|} + \frac{1}{N} \underset{\overset{\wedge\!\!\!|}{C}}{|B_N|} \leq$$

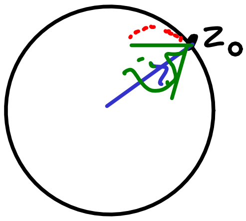
$$\leq \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) C + \frac{1}{M} C + \frac{1}{N} C \xrightarrow[M, N \to \infty]{} 0$$

Twierdzenie (Abel)

Niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ szeregiem o promieniu zbieżności R. Załóżmy, że $|z_0| = R$ i że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ jest zbieżny. Wtedy

$$\lim_{r\to 1^-} f(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

$r \in \mathbb{R}$ $\quad r \uparrow 1$



Dowód.

Bso: $R=1, \; z_0 = 1$

$$\sum a_n (rz_0)^n \xrightarrow{?} \sum a_n z_0^n$$

$$\sum (a_n z_0^n)\cdot r^n \qquad \sum (a_n z_0^n)\cdot 1^n$$

$\sum (a_n z_0^n) z^n$

$R=1$

$z=1 \leftrightarrow z_0$

Dowodzimy: $R=1$, $\sum a_n$ zbieżny $\Longrightarrow \lim_{r\uparrow 1} \sum a_n r^n = \sum a_n$

Niech $A_n = \sum_{k=M}^{n} a_k$. Dobieramy M tak, by $|A_n| < \epsilon$ (dla $n \geq M$)

$$\sum_{n=M}^{N} a_n r^n - \sum_{n=M}^{N} a_n = \sum_{n=M}^{N} (r^n - 1) a_n = \sum_{n=M}^{N-1} \left((r^n - \cancel{1}) - (r^{n+1} - \cancel{1})\right) A_n - (r^M - 1) A_{M-1} + (r^N - 1) A_N$$

$$|-||-| \leq \sum_{n=M}^{N-1} (1-r) r^n \underset{\epsilon}{\underset{\wedge|}{|A_n|}} + \underset{\epsilon}{\underset{\wedge|}{|A_{M-1}|}} + \underset{\epsilon}{\underset{\wedge|}{|A_N|}} \leq 2\epsilon + \epsilon (1-r) \underset{\frac{r^M}{1-r}}{\underset{\wedge|}{\sum_{n=M}^{N-1} r^n}} \leq 3\epsilon$$

$N \to \infty$:

$$|R_M(r)| = \left|\sum_{n=M}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=M}^{\infty} a_n\right| \leq 3\epsilon$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{M-1} a_n (r^n - 1) + R_M(r)\right| \leq$$

$$\underbrace{\leq \sum_{n=0}^{M-1} \underbrace{|a_n||r^n - 1|}_{\downarrow r\uparrow 1 \; 0} + \underset{3\epsilon}{\underset{\wedge|}{|R_M(r)|}}}_{\wedge| \; 4\epsilon} \quad \text{dla } r \text{ dostatecznie bliskich } 1. \qquad \square$$