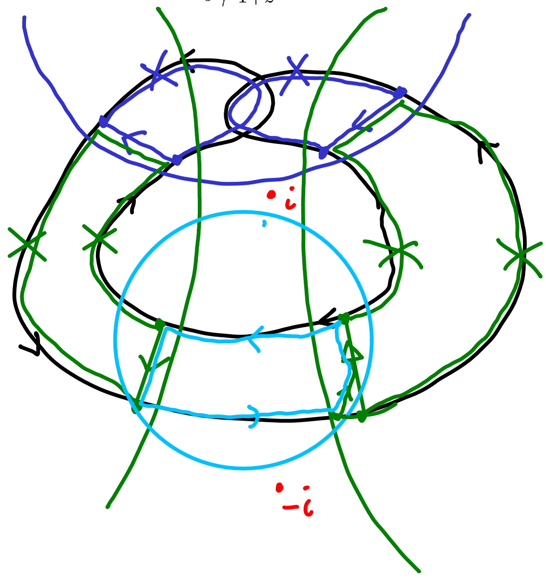
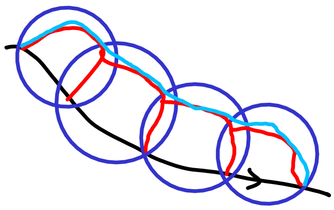
Nim policzysz, kontur zmień!

Przykład.
$\frac{1}{1+z^2} \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \{\pm i\})$; Obliczmy $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ dla γ z obrazka.



$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 0$$

Idea



deformacja

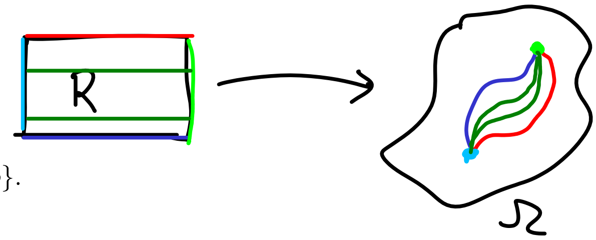
homotopia

Homotopia

Definicja.

Niech $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ będą ciągłymi krzywymi o wspólnych końcach (tzn. $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = k$). Mówimy, że γ_0 i γ_1 są *homotopijne* (modulo końce, w zbiorze Ω), jeśli istnieje ciągła funkcja (homotopia) $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, taka że

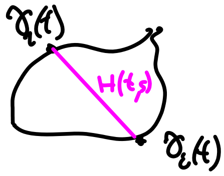
$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad & H(t,0) = \gamma_0(t) \\ & H(t,1) = \gamma_1(t) \\ \forall s \in [0,1] \quad & H(a,s) = p \\ & H(b,s) = k \end{aligned}$$



Oznaczenie: $\gamma_0 \sim \gamma_1$; lub, precyzyjniej, $\gamma_0 \sim \gamma_1 \operatorname{rel} \{a,b\}$.

Przykład

- Jeśli Ω jest wypukły, to każde dwie ciągłe krzywe są homotopijne:



$$H(t,s) = (1-s)\cdot\gamma_0(t) + s\cdot\gamma_1(t)$$

- Jeśli Ω jest homeomorficzny ze zbiorem wypukłym, to każde dwie ciągłe krzywe są homotopijne:

$$H(t,s) = \varphi^{-1}\Big((1-s)\,\varphi\big(\gamma_0(t)\big) + s\cdot\varphi\big(\gamma_1(t)\big)\Big)$$

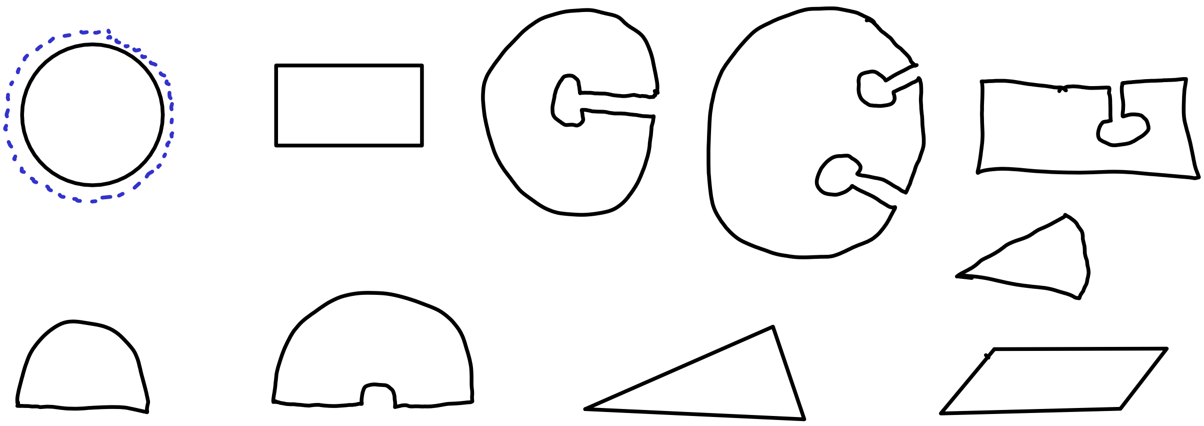
$\varphi\colon \Omega \to U$

U wypukły

Definicja

Obszar Ω nazywamy *jednospójnym,* jeśli w Ω każde dwie ciągłe krzywe o wspólnych końcach są homotopijne.

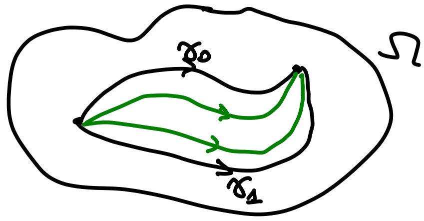
Przykłady.



Twierdzenie.

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie otwarty, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, zaś $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ niech będą dwiema homotopijnymi krzywymi o wspólnych końcach. Wtedy

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$



Dowód.

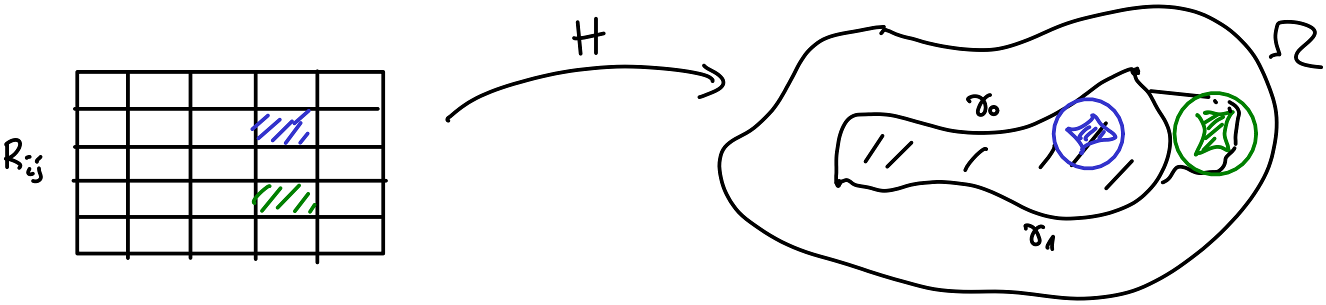
Niech $R = [a,b] \times [0,1]$; niech $H \colon R \to \Omega$ będzie homotopią γ_0 z γ_1.

Niech $\epsilon = d(H[R], \mathbf{C} \setminus \Omega) > 0$.

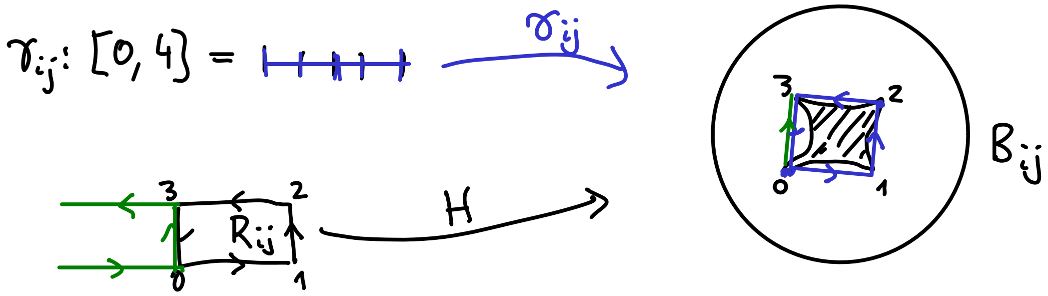
Dobierzmy $\delta > 0$ tak, by $(\forall r, r' \in R)(|r - r'| < \delta \Rightarrow |H(r) - H(r')| < \epsilon)$.

Podzielmy R na prostokąty R_{ij} o średnicach $< \delta$; wtedy $\operatorname{diam} H[R_{ij}] < \epsilon$.

Do każdego R_{ij} można dobrać otwarte koło B_{ij} tak, by $H[R_{ij}] \subseteq B_{ij} \subseteq \Omega$.

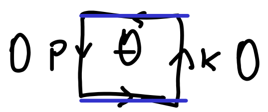


Niech γ_{ij} będzie łamaną łączącą obrazy przez H wierzchołków R_{ij}.

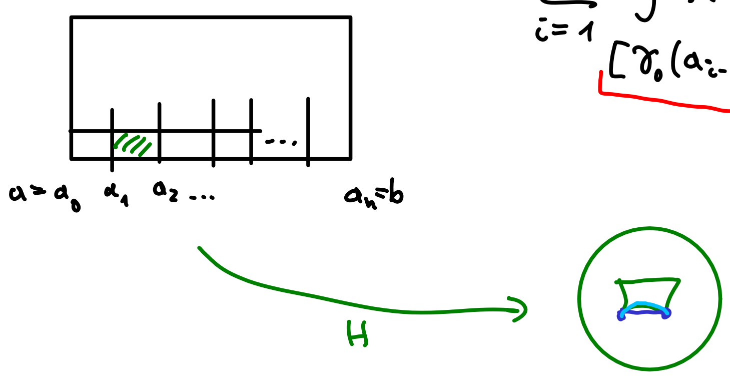


Mamy $\int_{\gamma_{ij}} f(z)dz = 0$ (z tw. Cauchy'ego dla dysku).

$$0 = \sum_{i,j} \int_{\gamma_{ij}} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz$$



$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{[\gamma_0(a_{i-1}), \gamma_0(a_i)]}}_{\gamma_0|_{[a_{i-1}, a_i]}} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{[\gamma_1(a_{i-1}), \gamma_1(a_i)]}}_{\gamma_1|_{[a_{i-1}, a_i]}} f(z)dz$$



□

Wniosek

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem jednospójnym.

1. Każda funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ma pierwotną w Ω.
2. Dla dowolnej $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i dowolnej zamknietej krzywej γ w Ω zachodzi $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
3. Dla dowolnej $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i dowolnych krzywych γ_0, γ_1 w Ω, o wspólnych końcach, zachodzi

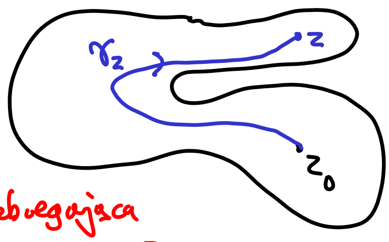
$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Dowód.

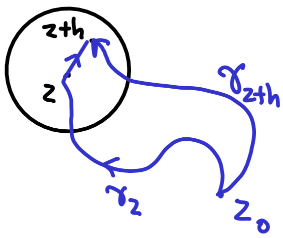
Warunki 2) i 3) wynikają z 1) (tak jak to było dla dysku).

Pokazujemy 1). Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$; ustalmy $z_0 \in \Omega$. Dla $z \in \Omega$ wybieramy krzywą γ_z w Ω łączacą z_0 z z. Niech

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$$



Niech $z \in B(z,\epsilon) \subseteq \Omega$; niech $|h| < \epsilon$



$\gamma_{z+h} \sim \gamma_z [z, z+h]$ ← krzywa przebiegająca γ_z, a potem $[z,z+h]$

$$\frac{1}{h}\left(F(z+h) - F(z)\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_z[z,z+h]} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)\,dw\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)dw \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)}_{\text{dokładnie tak, jak w dysku}}$$

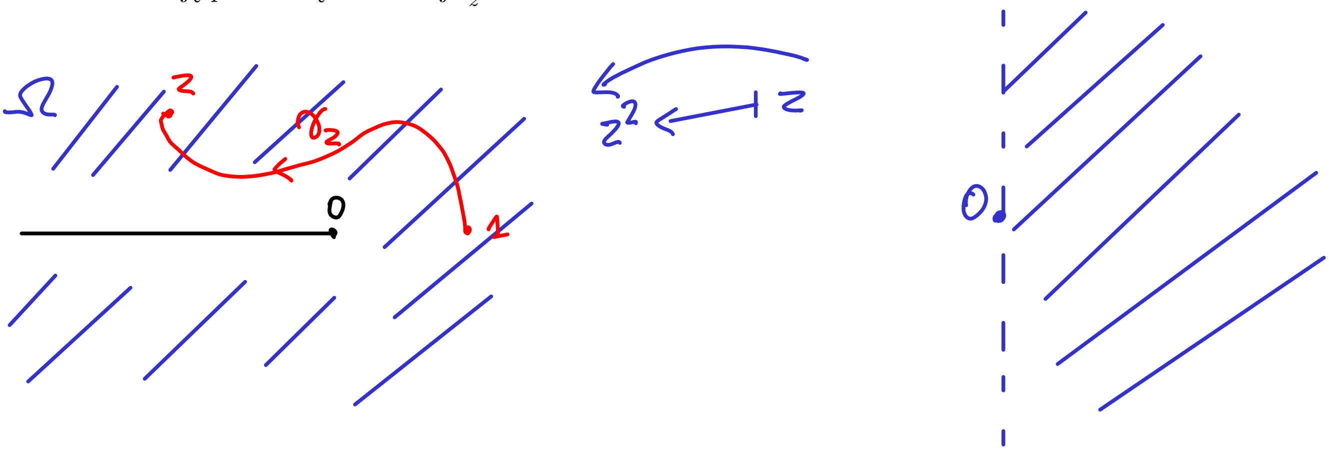
□

Logarytm

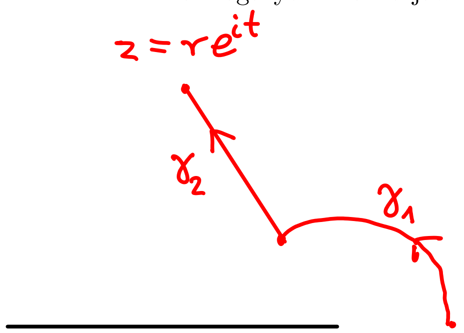
Przykład.
Logarytm można zdefiniować w $\Omega = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{\leq 0}$ jako całkę:

$$\log z = \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w},$$

gdzie γ_z jest krzywą w Ω z 1 do z. Obszar Ω jest jednospójny, więc definicja jest poprawna i określa w Ω funkcję pierwotną dla funkcji $\frac{1}{z}$.



Ten logarytm można jawnie wyliczyć:



$$\log(re^{it}) = \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = it + \log r$$

$$\gamma_1(s) = e^{is}, \quad s \in [0, t]$$

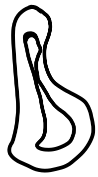
$$\gamma_2(s) = se^{it}, \quad s \in [1, r]$$

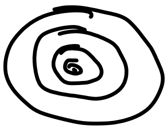
$$\int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} = \int_0^t \frac{d(e^{is})}{e^{is}} = \int_0^t \frac{ie^{is}\,ds}{e^{is}} = \int_0^t i\,ds = it$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = \int_1^r \frac{d(se^{it})}{se^{it}} = \int_1^r \frac{e^{it}\,ds}{se^{it}} = \int_1^r \frac{ds}{s} = \log r$$

Wariant: swobodna homotopia zamkniętych krzywych.

Jeśli $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ są ciągłymi krzywymi zamkniętymi, to nazywamy je *homotopijnymi (swobodnie),* jeśli istnieje homotopia – ciągłe $H \colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, takie że





$$\forall t, s, \qquad H(t,0) = \gamma_0(t), \quad H(t,1) = \gamma_1(t), \quad H(a,s) = H(b,s).$$

Twierdzenie

Jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, zaś γ_0, γ_1 są homotopijnymi krzywymi zamkniętymi w Ω, to $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

Przykład 1.

$$\frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \{0\}), \qquad \gamma_n(t) = e^{int}, t \in [0, 2\pi].$$

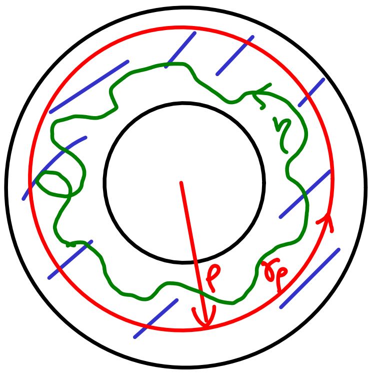
$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{int})}{e^{int}} = \int_0^{2\pi} \frac{in e^{int} dt}{e^{int}} = \int_0^{2\pi} in \, dt = 2\pi i \cdot n$$

Zatem: dla $n \neq k$ krzywe γ_n i γ_k nie są homotopijne w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Przykład 2.

Niech $A(r,R) = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R\}$.

Dla $\rho \in (r,R)$ niech $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

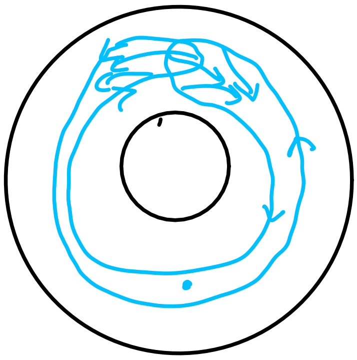


Dla $\rho, \rho' \in (r,R)$ krzywe γ_ρ i $\gamma_{\rho'}$ są homotopijne w $A(r,R)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \int_{\gamma_{\rho'}} f(z)dz \quad \text{dla dowolnej } f \in \mathcal{O}(A(r,R))$$

$$\|$$

$$\int_\eta f(z)dz$$

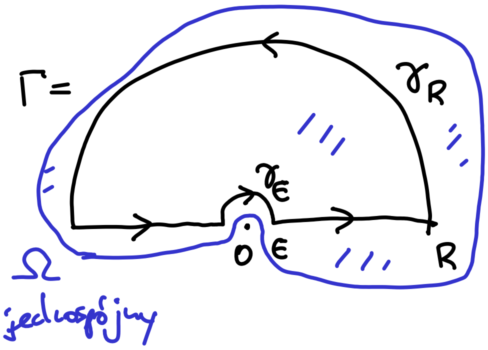


Przykład.

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{ix}}{x^2}\right) \; ; \text{ rozpatrujemy } f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}. \quad f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

$\Gamma =$



$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{R}\right)\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

$$0 = \int_\Gamma f(z)dz = \Big(\underbrace{\int_{\gamma_R}}_{\text{dąży do } 0} + \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon}}_{\text{policzymy}} + \int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{R}\Big) f(z)dz$$

$\underline{\gamma_R:}$ $\quad z = Re^{it},\ t\in[0,\pi] \qquad |e^{iz}| = \left|e^{iR(\cos t + i\sin t)}\right| = \left|e^{-R\sin t}\right| \leqslant 1$

$$|f(z)| \underset{\text{na } \gamma_R}{\leqslant} \left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \leqslant \frac{1+|e^{iz}|}{|z|^2} \leqslant \frac{2}{R^2}$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma_R^*}|f(z)|\cdot \ell(\gamma_R) \leqslant \frac{2}{R^2}\cdot\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\underline{\gamma_\epsilon:}$

$$\frac{1-e^{iz}}{z^2} = \frac{1-\left(1+iz+\frac{i^2z^2}{2}+\dots\right)}{z^2} = -\frac{i}{z} + \underbrace{\left(-\frac{i^2}{2} - \frac{i^3 z}{3!} - \dots\right)}_{E(z),\ E\in\mathcal{O}(\mathbb{C})}$$

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz = \int_{\gamma_\epsilon} -\frac{i}{z}dz + \int_{\gamma_\epsilon} E(z)dz$$

$$\int_{\gamma_\epsilon} -\frac{i}{z}dz = i\int_0^\pi \frac{dz}{z} = i\int_0^\pi \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = i\int_0^\pi i\,dt = -\pi$$

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon} E(z)dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma_\epsilon^*}|E(z)|\cdot\ell(\gamma_\epsilon) \leqslant C\cdot\pi\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

Twierdzenie (Brouwer)
Każde ciągłe odwzorowanie domkniętego koła w siebie ma punkt stały.

Dowód.
Niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$.
Załóżmy nie wprost, że ciągłe $f\colon D \to D$ nie ma punktu stałego $((\forall z \in D)(f(z) \neq z))$.
Z takiego f można wyprodukować retrakcję koła na brzeg:
ciągłe $r\colon D \to \partial D$ spełniające $r(z) = z$ dla $z \in \partial D$.

Używając r budujemy homotopię (w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$) krzywych (określonych dla $t \in [0, 2\pi]$)

$$\gamma(t) = e^{it}, \qquad \eta(t) = r(0),$$

określając ją wzorem

$$H(t, s) = r(se^{it}).$$

Ale γ i η nie są homotopijne w $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, gdyż

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 = \int_\eta \frac{dz}{z}.$$