Morera

Twierdzenie Morery

Niech f będzie ciągłą funkcją na otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Załóżmy, że dla każdego domkniętego trójkąta $T \subseteq \Omega$ zachodzi

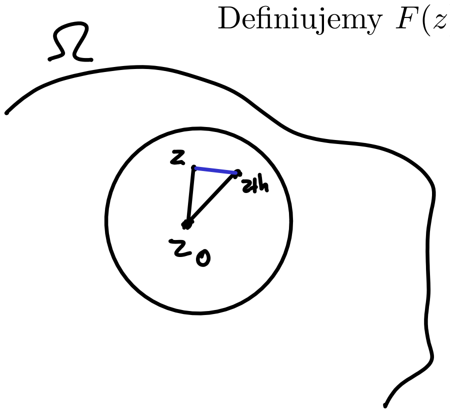
$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Wtedy f jest holomorficzna w Ω.

Dowód.

Niech $z_0 \in \Omega$, $B(z_0, R) \subseteq \Omega$. Pokażemy $f \in \mathcal{O}(B(z_0, R))$.

Definiujemy $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$ dla $z \in B(z_0, R)$.



Sprawdzimy, że $F' = f$.

$$\frac{1}{h}\big(F(z+h)-F(z)\big) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)\,dw}_{= f(z)} + \underbrace{\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} \big(f(w)-f(z)\big)\,dw}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

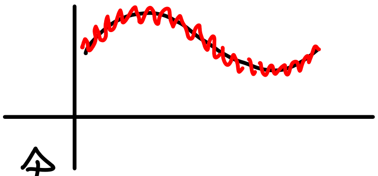
$$\left|\int_{[z,z+h]} \big(f(w)-f(z)\big)dw\right| \leq \underbrace{\sup_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)|}_{\downarrow\, 0 \ (h\to 0)} \cdot \underbrace{\ell([z,z+h])}_{= |h|}$$

f ciągła

Skoro $F' = f$, to $F \in \mathcal{O}(B(z_0,R))$

stąd $\underbrace{F'}_{= f}, F'', F''', \dots$ istnieją i są w $\mathcal{O}(B(z_0,R))$

$\square$



Wniosek 1
Niech $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f_n \longrightarrow f$ niemal jednostajnie w Ω. Wtedy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
Co więcej, $f_n' \longrightarrow f'$ niemal jednostajnie w Ω (i także samo dla wyższych pochodnych).

Dowód.

Funkcja f jest ciągła jako niemal jednostajna granica funkcji ciągłych. Dla trójkąta $T \subseteq \Omega$:

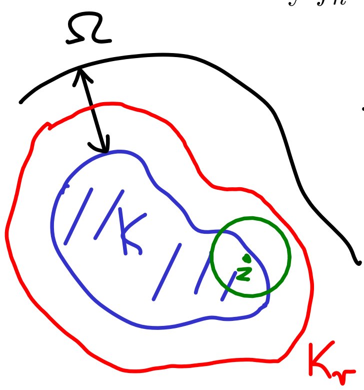
$$\int_{\partial T} f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial T} f_n(z)dz = 0.$$

Na mocy tw. Morery $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Zbieżność pochodnych:

Niech $K \subseteq \Omega$ będzie zwarty, $r = \frac{1}{2}d(K, \partial\Omega)$, $K_r = \{z \in \mathbf{C} \mid d(z,K) \leq r\}$ (też zbiór zwarty).

Mamy $f_n \rightrightarrows f$ na K_r. Dla $z \in K$:



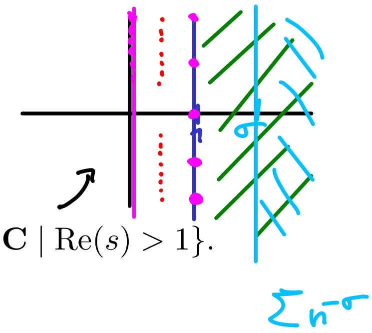
$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw \;\overset{\text{jedn. względem } z}{\underset{K}{\rightrightarrows}}\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = f'(z)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)} \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{w\in\partial B(z,r)}|f_n(w)-f(w)|\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2\pi r$$

$$\leq \frac{1}{r}\sup_{w\in K_r}|f_n(w)-f(w)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

ζ Riemanna



Przykład.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Uzasadnimy, że ten wzór określa holomorficzną funkcję w $\Omega = \{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

$$\frac{1}{n^s} = n^{-s} = \exp(-s \log n)$$

$$|n^{-s}| = |e^{-s\log n}| = e^{-\mathrm{Re}(s \log n)} = e^{-\mathrm{Re}(s)\log n} = n^{-\mathrm{Re}(s)}$$

Dla dowolnego $\sigma > 1$: szereg $\sum n^{-s}$ majoryzuje się – dla $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma$ – przez zbieżny szereg liczb dodatnich $\sum n^{-\sigma}$; zatem zbiega jednostajnie w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma$.

Stąd $\sum n^{-s}$ zbiega niemal jednostajnie w Ω i określa $\zeta \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Lemat (zadanie)

Jeśli $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ są wspólnie ograniczone, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ zbiega niemal jednostajnie w obszarze $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Np. $\sum (-1)^n n^{-s}$ zbiega niemal jednostajnie (i zadaje funkcję holomorficzną) w obszarze $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Dla $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$2^{-s}\zeta(s) = 2^{-s}\sum n^{-s} = \sum (2n)^{-s}$$

$$2\cdot 2^{-s}\zeta(s) - \zeta(s) = \sum 2\cdot(2n)^{-s} - \sum n^{-s} = \sum (-1)^n n^{-s}$$

$$(*) \quad \zeta(s) = \underbrace{(2\cdot 2^{-s}-1)^{-1}}_{\substack{\text{holomorficzne} \\ \text{o ile } 2\cdot 2^{-s}-1 \neq 0}} \cdot \underbrace{\left(\sum (-1)^n n^{-s}\right)}_{\in\, \mathcal{O}(\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0})} \qquad (\text{równość dla } \mathrm{Re}(s) > 1)$$

kiedy $2\cdot 2^{-s}-1 \neq 0$? $\quad 2^{1-s} = 1, \quad e^{(1-s)\log 2} = 1, \quad (1-s)\log 2 = k\cdot 2\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

Zatem $(2\cdot 2^{-s}-1)^{-1} \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C} \setminus \left\{1 + k\cdot\frac{2\pi i}{\log 2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$ $\qquad s = 1 + k\cdot\frac{2\pi i}{\log 2}, \ k \in \mathbb{Z}$

Prawa strona (*) opisuje funkcję holomorficzną w

$\mathbb{C}_{\mathrm{Re}>0} \setminus \left\{1 + k\cdot\frac{2\pi i}{\log 2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ i zadaje kontynuację analityczną ζ do tego zbioru

Wniosek 2

Niech $F\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbf{C}$ będzie ciągła. Załóżmy też, że dla każdego $s \in [a,b]$ funkcja $F(\cdot, s) \in \mathcal{O}(\Omega)$. Połóżmy

$$f(z) = \int_a^b F(z,s)ds.$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dowód.

Używamy Morery:

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T} \left(\int_a^b F(z,s)ds \right) dz = \int_a^b \left(\int_{\partial T} F(z,s)dz \right) ds = 0$$

Dokładniej:

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{3} \int_{p_i}^{k_i} f(\gamma_i(t))\,\gamma_i'(t)\,dt = \sum_{i=1}^{3} \int_{p_i}^{k_i} \int_a^b \underbrace{F(\gamma_i(t), s)\,\gamma_i'(t)}_{\text{ciągła na } [p_i, k_i] \times [a,b]}\,ds\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_a^b \int_{p_i}^{k_i} F(\gamma_i(t), s)\,\gamma_i'(t)\,dt\,ds = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} F(z,s)\,dz \right) ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\partial T} F(z,s)\,dz \right) ds = \int_a^b 0\,ds = 0$$

$\square$

Przykład.

Niech $f \in C([a,b])$. Definiujemy

$$\widehat{f}(z) = \int_a^b f(t) e^{-itz} dt.$$

Wówczas $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$.

Γ **Eulera**

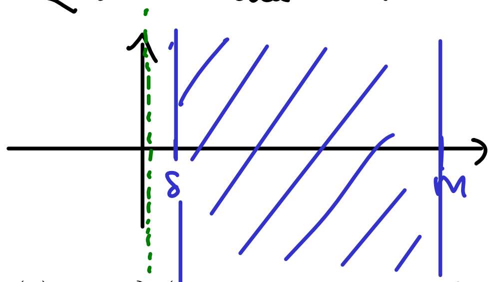
Przykład.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

Ta całka zbiega dla $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$|t^{s-1}| = |e^{(s-1)\log t}| = e^{(\mathrm{Re}\, s - 1)\log t} = t^{\mathrm{Re}(s)-1}$$

$$\int_0^\infty |e^{-t} t^{s-1}| dt \leqslant \int_0^\infty e^{-t} t^{\mathrm{Re}(s)-1} dt < \infty \quad \text{dla } \mathrm{Re}\, s > 0$$



Niech $\Gamma_\epsilon(s) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{s-1} dt$.

Z wniosku 2 z tw. Morery wiemy, że $\Gamma_\epsilon \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$.

Pokażemy, że $\Gamma_\epsilon \rightrightarrows \Gamma$ w $\Omega_{\delta,M} = \{s \in \mathbf{C} \mid \delta < \mathrm{Re}(s) < M\}$ (dla dowolnych $0 < \delta < M < \infty$).

Z wniosku 1 z tw. Morery wyniknie wtedy, że $\Gamma \in \mathcal{O}(\{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\})$.

$$|\Gamma(s) - \Gamma_\epsilon(s)| \leqslant \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt$$

$\epsilon < 1$

$$\int_0^\epsilon e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leqslant \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\delta-1} dt \leqslant \int_0^\epsilon t^{\delta-1} dt = \frac{\epsilon^\delta}{\delta} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$$\int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leqslant \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} t^{M-1} dt \leqslant C_M \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t/2} dt = C_M \left. \frac{e^{-t/2}}{-1/2} \right|_{1/\epsilon}^\infty = 2C_M e^{-1/2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$t^{M-1} \leqslant C_M \cdot e^{t/2}$ dla $t \geqslant 1$

Γ – kontynuacja analityczna

Fakt

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad (\text{dla } \mathrm{Re}(s) > 0)$$

Dowód.

$$\int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{d}{dt}(e^{-t}t^s)dt = \underbrace{\int_\epsilon^{1/\epsilon} -e^{-t}t^s ds}_{\downarrow} + \underbrace{\int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t}\cdot s t^{s-1} dt}_{\downarrow}$$

$$\| $$

$$e^{-t}t^s \Big|_\epsilon^{1/\epsilon}$$

$$\epsilon\to 0 \downarrow$$

$$0 \quad = \quad -\Gamma(s+1) \quad + \quad s\Gamma(s)$$

$$e^{-t}t^s \longrightarrow 0$$

1) $t\to 0$

2) $t\to\infty$

Wniosek

Γ ma kontynuację analityczną do $\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}_{\leq 0}$.

Dowód.

$$\Gamma(s) \underset{\mathrm{Re}s>0}{=} \frac{\Gamma(s+1)}{s} \underset{\mathrm{Re}>-1}{=} \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s} = \frac{\Gamma(s+3)}{(s+2)(s+1)s} = \ldots$$

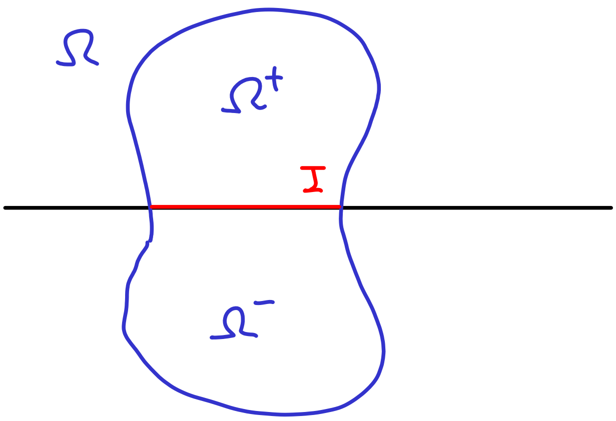
$\mathrm{Re}>0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}>-1$, $s\neq 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}>-2$, $s\neq 0,-1$ $\qquad$ ....

łącznie te wzory określają funkcję holomorficzną w $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$

– kontynuację analityczną Γ do tego obszaru.

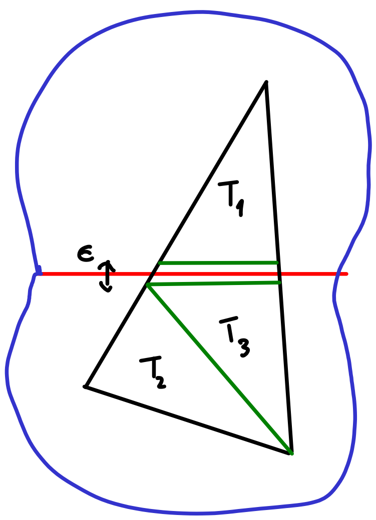
Zasada odbicia Schwarza

Załóżmy, że Ω jest obszarem symetrycznym względem osi rzeczywistej; niech:
$\Omega^+ = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$,
$\Omega^- = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$,
$I = \Omega \cap \mathbf{R}$.



Lemat
Jeśli F jest ciągła na Ω i holomorficzna w $\Omega \setminus \mathbf{R}$, to F jest holomorficzna w Ω.
Dowód.

Morera. Dla $T \subseteq \Omega^+$ lub $T \subseteq \Omega^-$ mamy, że $\int_{\partial T} F(z)\,dz = 0$



Jeśli T przecina I:

$$\int_{\partial T} F(z)\,dz = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \int_{\partial T_i} F(z)\,dz}_{=0} + \int F(z)\,dz \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$\square$

Twierdzenie (zasada odbicia Schwarza)

Załóżmy, że f jest ciągłą funkcją na $\Omega^+ \cup I$, holomorficzną w Ω^+ i rzeczywistą na I. Wtedy istnieje rozszerzenie $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ funkcji f.

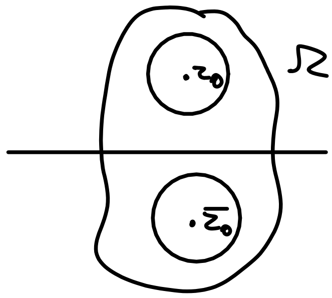
Dowód.

Definiujemy F na Ω^- wzorem:

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

Trzeba sprawdzić:

1) holomorficzność w Ω^-
2) ciągłość f w punktach $x \in I$



D-d 1:

Dla $z_0 \in \Omega^+$ mamy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{dla } z \in B(z_0, r)$$

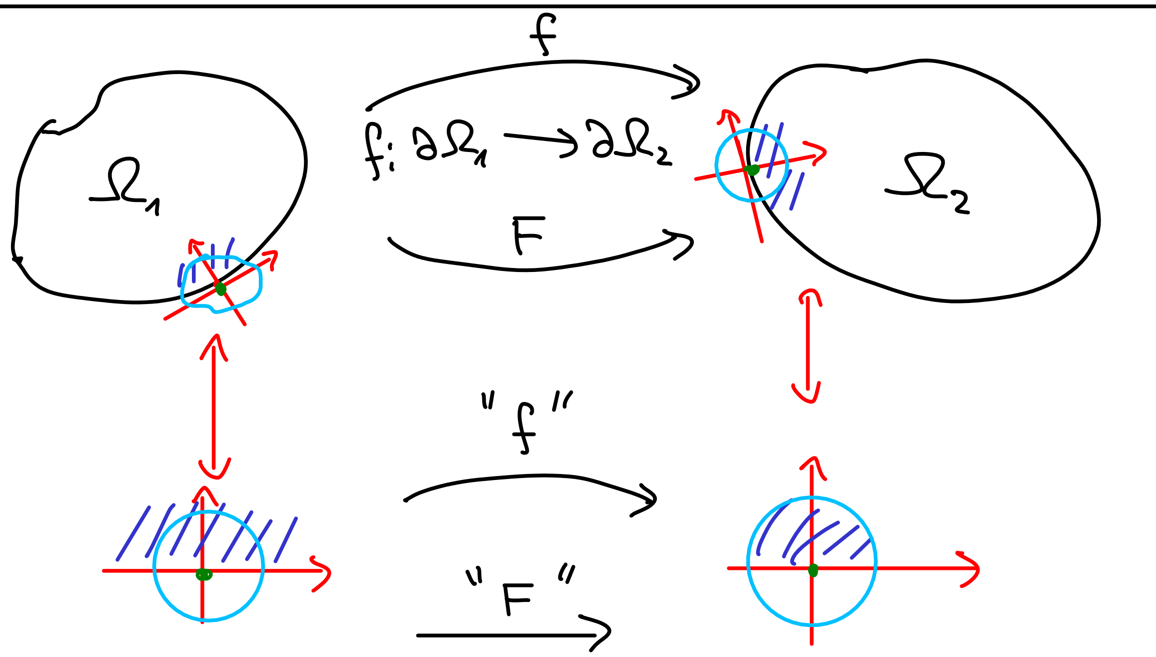
Dla $z \in B(\overline{z}_0, r)$:

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum a_n (\overline{z} - z_0)^n} = \sum \overline{a_n} (z - \overline{z}_0)^n$$

D-d 2:

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^-}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^-}} \overline{f(\overline{z})} = \lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^+}} \overline{f(z)} = \overline{\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega^+}} f(z)} = \overline{f(x)} = f(x)$$

Z lematu wynika $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\square$



brzegi są rzeczywiste analityczne