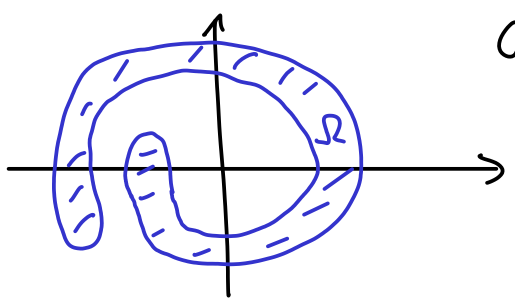
Runge

Przykład.
Funkcji $\frac{1}{z}$ na pierścieniu $A(1,2)$ nie da się jednostajnie przybliżać wielomianami.

- *Funkcje wymierne* to ilorazy wielomianów:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad f \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus Z(Q))$$

  gdzie $Z(Q)$ to zbiór zer wielomianu $Q(z)$. Mówimy, że *osobliwości* / *bieguny* funkcji f leżą w zbiorze $Z(Q)$.
- Co z przybliżaniem $\frac{1}{z}$ wielomianami na innych zbiorach:



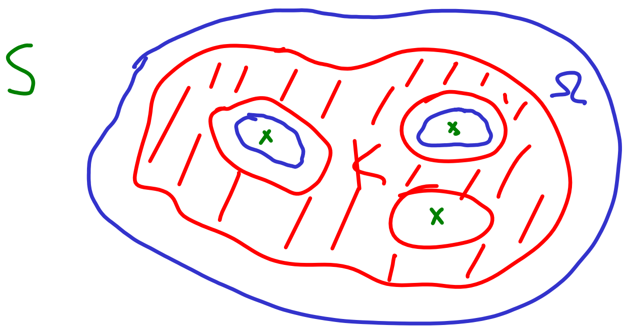
Czy w Ω można jednostajnie przybliżać $\frac{1}{z}$ wielomianami?

Twierdzenie (Runge)
Niech $K \subseteq \mathbf{C}$ będzie zwarty, a f niech będzie holomorficzna na pewnym otoczeniu K.

a) Załóżmy, że zbiór S ma niepusty przekrój z każdą ograniczoną składową $\mathbf{C} \setminus K$. Wtedy f można przybliżać jednostajnie na K funkcjami wymiernymi o osobliwościach w S.
b) Załóżmy, że $\mathbf{C} \setminus K$ jest spójny. Wtedy f można przybliżać jednostajnie na K wielomianami.

$a \Rightarrow b$: bierzemy $S = \emptyset$

po cichu:
S to naprawdę
$S \cup \{\infty\}$;
∞ to biegun
wielomianu
niestałego



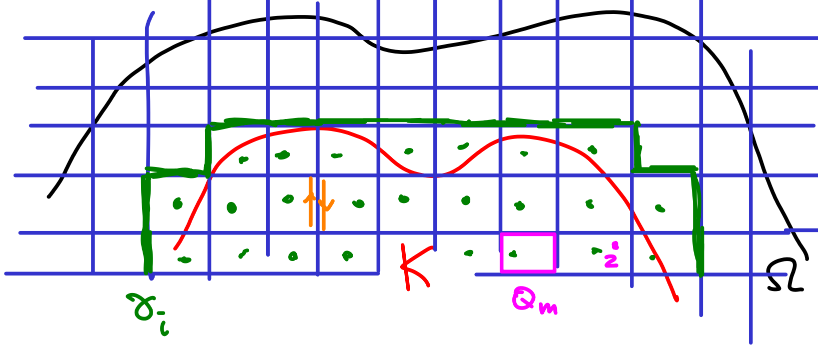
Idee dowodu:
1) Wzór Cauchy'ego
2) rozwinięcie w szereg
3) użycie spójności

Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, gdzie $\Omega \supseteq K$.

Lemat 1
Istnieje skończony układ odcinków $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ w $\Omega \setminus K$, taki że dla $z \in K$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Dowód.
Rozważamy siatkę kwadratów o średnicach mniejszych od $d(K, \partial\Omega)$.
Niech $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_M\}$ będą tymi z kwadratów siatki, które zahaczają o K.
$\gamma_1, \dots, \gamma_N$ – boki kwadratów siatki, które należą do dokładnie jednego kwadratu z $\mathcal{Q}$



Wzór Cauchy'ego: dla $z \in \operatorname{int}(Q_n)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(w)}{w - z} dw = \begin{cases} f(z), & \text{jeśli } n = m \\ 0, & \text{jeśli } n \neq m \end{cases}$$

Dla $z \in K \setminus \bigcup_n \partial Q_n$:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Z ciągłości obu stron na K wynika, że równość zachodzi dla wszystkich $z \in K$.

Lemat 2

Funkcja $z \mapsto \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w-z} dw$ przybliża się jednostajnie na K funkcjami wymiernymi o osobliwościach w γ_n^*.

Dowód. Niech $\gamma = \gamma_n$.

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \underbrace{\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)}\,dt = \int_0^1 F(z,t)\,dt =$$

$F(z,t)$ – ciągła na $K \times [0,1]$

$\forall \epsilon > 0\ \exists n \quad |p-p'| < \frac{1}{n} \Rightarrow |F(p)-F(p')| < \epsilon$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F\left(z, \tfrac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \quad + \quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(F(z,t) - F\left(z,\tfrac{k}{n}\right)\right) dt$$

$$\|$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\gamma(\frac{k}{n}))}{\gamma(\frac{k}{n}) - z} \gamma'\left(\tfrac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

wymierna funkcja zmiennej z

o biegunach w $\gamma(\frac{k}{n})$

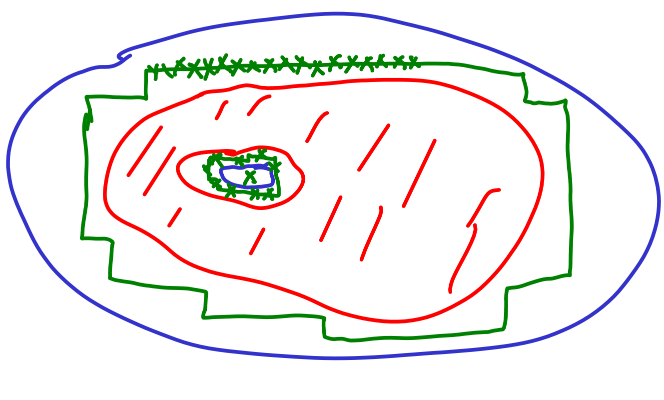
$\in$

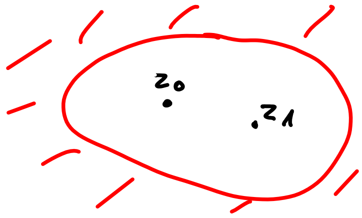
γ^*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(F(z,t) - F\left(z,\tfrac{k}{n}\right)\right) dt \right|$$

$$\leq$$

$$\sum \int \left|F(z,t) - F\left(z,\tfrac{k}{n}\right)\right| dt \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \epsilon \, dt = \epsilon$$





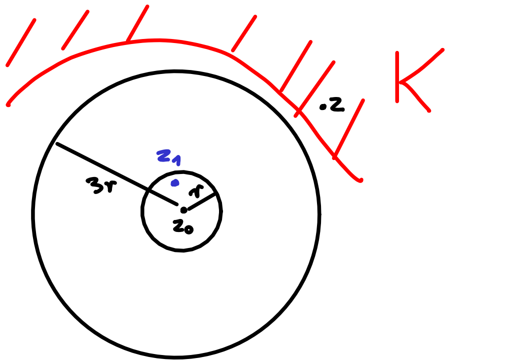
$$\frac{1}{z-z_0} \qquad \frac{1}{z-z_1}$$

Lemat 3

Jeśli z_0, z_1 leżą w tej samej składowej $\mathbf{C}\setminus K$, to funkcję $\frac{1}{z-z_0}$ można przybliżać jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_1}$. (W konsekwencji wielomiany od $\frac{1}{z-z_0}$ można przybliżać jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_1}$.)

Dowód.

1) Niech $z_1 \in B(z_0, r) \subseteq \overline{B}(z_0, 3r) \subseteq \mathbf{C}\setminus K$.



$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-z_1)-(z_0-z_1)} = \frac{1}{z-z_1}\,\frac{1}{1-\frac{z_0-z_1}{z-z_1}} =$$

$$= \frac{1}{z-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-z_1}{z-z_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(z_0-z_1)^n\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{|z_0-z_1|}{|z-z_1|} < \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

dla $z \in K$

zbiega jednostajnie na K

dostatecznie daleka suma częściowa jednostajnie przybliża $\frac{1}{z-z_0}$ na K

2) Niech U będzie rozważaną składową $\mathbf{C}\setminus K$, $z_0 \in U$.

$V := \{z_1 \in U \mid \frac{1}{z-z_0}$ można przybliżać jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_1}\}$

Z części 1) wnioskujemy, że V jest otwarty:

jeśli $z_1 \in V$, $z_2 \in B(z_1, r) \subseteq \overline{B}(z_1, 3r) \subseteq \mathbf{C}\setminus K$, to

- $\frac{1}{z-z_1}$ przybliża się jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_2}$,
- $\frac{1}{z-z_0}$ przybliża się jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_1}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{z-z_0}$ przybliża się jednostajnie na K wielomianami od $\frac{1}{z-z_2}$,

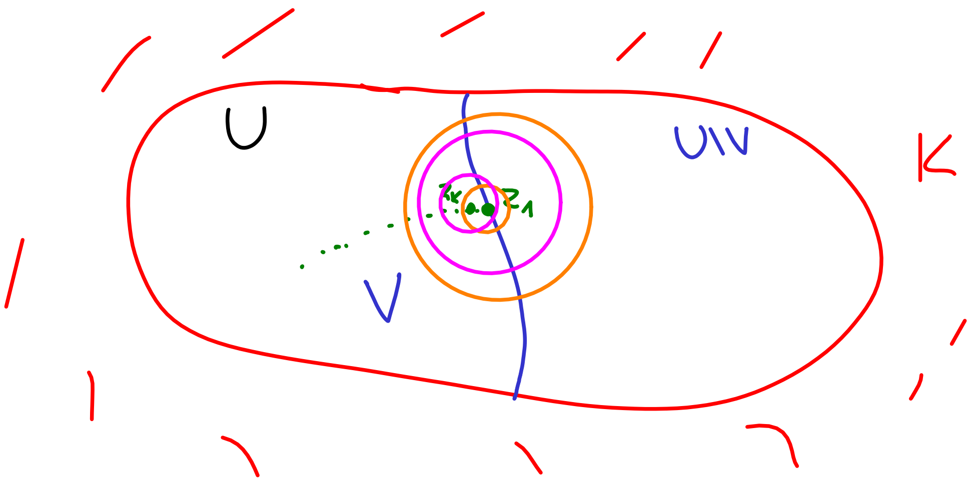
Teraz pokażemy, że $U\setminus V$ też jest otwarty:

Gdyby tak nie było, te pewne $z_1 \in U\setminus V$ byłoby granicą ciągu (z_n) elementów V.

Niech $z_k \in B(z_1, r) \subseteq \overline{B}(z_1, 4r) \subseteq \mathbf{C}\setminus K$;

wtedy $z_1 \in B(z_k, r) \subseteq \overline{B}(z_k, 3r) \subseteq \mathbf{C}\setminus K$

i mamy $z_1 \in V$, sprzeczność.

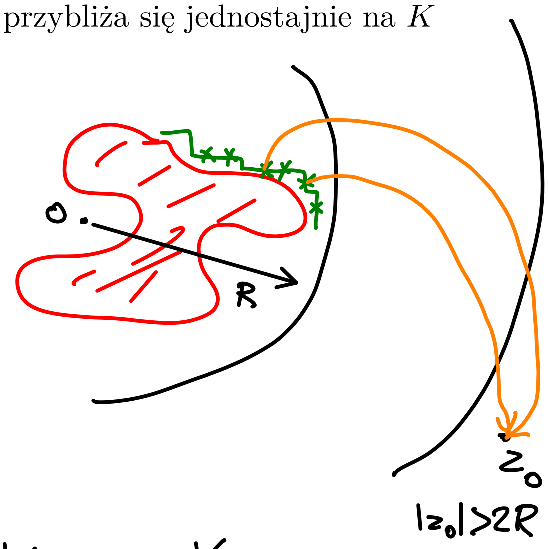


Lemat 4

Załóżmy, że $K \subseteq B(0,R)$ i że $|z_0| > 2R$. Wtedy $\frac{1}{z-z_0}$ przybliża się jednostajnie na K wielomianami od z.

Dowód.

Dla $z \in K$ mamy $\left|\frac{z}{z_0}\right| \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$.

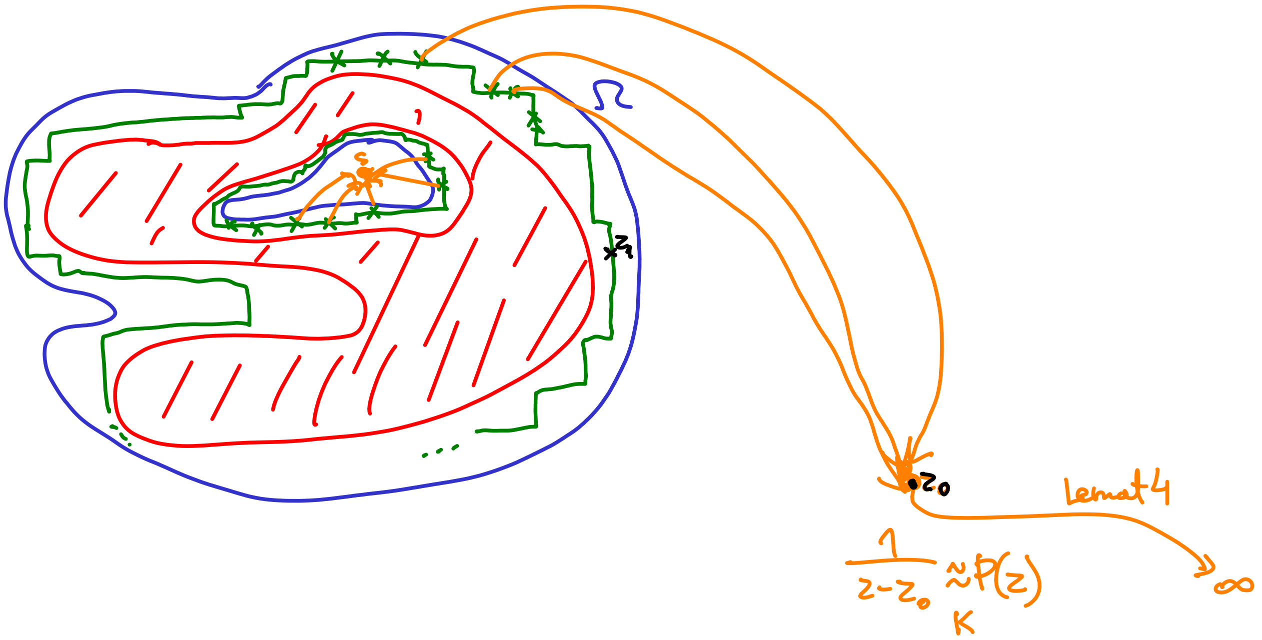


$$\frac{1}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z}{z_0}} =$$

$$= -\frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z_0^{n+1}}\cdot z^n$$

zbiega jednostajnie na K.

Podsumowanie dowodu twierdzenia:

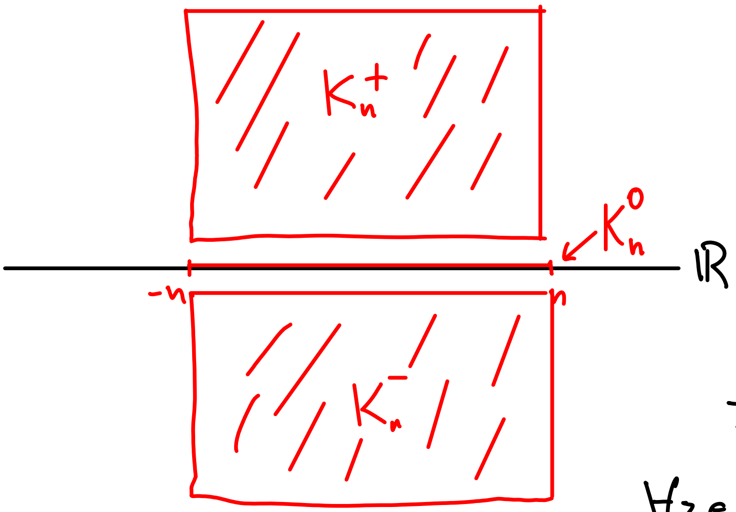


$\square$

Przykład.
Istnieje ciąg wielomianów $P_n(z) \in \mathbf{C}[z]$, taki że:
$P_n \longrightarrow 1$ niemal jednostajnie w obszarze $\mathrm{Im}(z) > 0$,
$P_n \longrightarrow -1$ niemal jednostajnie w obszarze $\mathrm{Im}(z) < 0$,
$P_n \longrightarrow 0$ niemal jednostajnie na $\mathbf{R}$.

Niech $K_n = \{z \in \mathbf{C} \mid -n \le \mathrm{Re}(z) \le n, \mathrm{Im}(z) \in [-n, -\frac{1}{n}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{n}, n]\}$

Dopełnienie K_n jest spójne, zatem funkcje holomorficzne na otoczeniu K_n można przybliżać jednostajnie na K_n wielomianami.



$$f_n(z) = \begin{cases} 1, & z \in K_n^+ \\ 0, & z \in K_n^0 \\ -1, & z \in K_n^- \end{cases}$$

Runge:
$\exists\, P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$
$\forall z \in K_n \quad |P_n(z) - f_n(z)| < \frac{1}{n}$

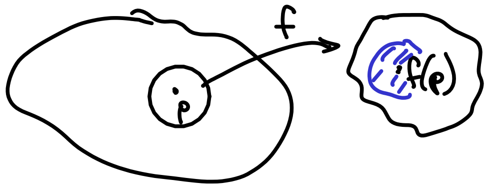
Ciąg (P_n) ma żądane własności.

Odwzorowania otwarte

Odwzorowanie jest ciągłe, jeśli przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Odwzorowanie jest *otwarte*, jeśli obrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Jest to własność lokalna: $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ jest otwarte, jeśli każdy punkt $p \in \Omega$ ma otwarte otoczenie którego obraz zawiera otwarte otocznie $f(p)$.



Odwzorowanie może być ciągłe, a nie być otwarte.

Przykład 1. Odwzorowanie stałe.

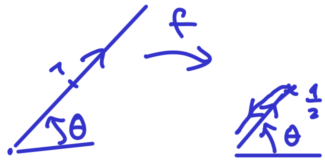
Przykład 2.

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}\right)$$

We wsp. biegunowych:

$$f(r,\theta) = \left(\frac{r}{1+r^2}, \theta\right)$$

ma max $= \frac{1}{2}$ dla $r=1$



B(0,3)

$$f(B(0,3)) = \overline{B}(0,\tfrac{1}{2})$$

f jest C^∞ jako funkcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$