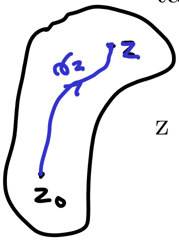
## Otwartość odwzorowań holomorficznych

**Lemat**

Niech $\Omega$ będzie obszarem jednospójnym, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Załóżmy, że $f$ nie ma zer w $\Omega$. Wtedy $f$ ma w $\Omega$ *analityczny logarytm:* istnieje $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, takie że $\exp \circ g = f$. W konsekwencji $f$ ma w $\Omega$ *analityczny pierwiastek* dowolnego stopnia: istnieją $g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, takie że $g_n(z)^n = f(z)$ dla $z \in \Omega$ $(n \in \mathbf{N})$.




Dowód.

Ustalmy $z_0 \in \Omega$ i liczbę $a \in \mathbf{C}$, taką że $e^a = f(z_0)$. Dla $z \in \Omega$ niech $\gamma_z$ będzie krzywą z $z_0$ do $z$. Zdefiniujmy

$$g(z) = a + \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

Wtedy $g \in \mathcal{O}(\Omega)$.

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$(e^{-g} f)' = -e^{-g} g' \cdot f + e^{-g} \cdot f' = e^{-g}\left(-\frac{f'}{f} \cdot f + f'\right) = 0$$

Zatem $e^{-g} f = \text{const} = e^{-g(z_0)} f(z_0) = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$, czyli $f = e^g$

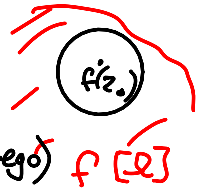
$$g_n(z) := \exp\left(\frac{1}{n} g(z)\right)$$

**Twierdzenie** (o odwzorowaniu otwartym)

Niestała funkcja holomorficzna określona na obszarze jest odwzorowaniem otwartym (tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte).

Dowód.

Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Pokażemy, że $B(f(z_0), \epsilon) \subseteq f[\Omega]$ dla pewnego $\epsilon > 0$.




Jeśli $f'(z_0) \neq 0$, teza wynika z ...tw. o funkcji odwrotnej (rzeczywistego)

Jeśli $f'(z_0) = 0$, to w otoczeniu $z_0$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k h(z)$$

gdzie $h(z_0) \neq 0$, $h$ jest holomorficzna i niezerowa w otoczeniu $B(z_0, \delta)$ punktu $z_0$.

Niech $g_k$ będzie analitycznym $k$-tym pierwiastkiem funkcji $h$ w $B(z_0, \delta)$.

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k h(z) = f(z_0) + (\underbrace{(z - z_0) g_k(z)}_{\varphi(z)})^k$$

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) = 1 \cdot g_k(z_0) + (z_0 - z_0) \cdot g_k'(z_0) = g_k(z_0) \neq 0$$

Zatem $\underset{\varphi(z_0)}{B(0, \epsilon)} \subseteq \varphi[B(z_0, \delta)]$

$\{z^k \mid z \in B(0, \epsilon)\} = B(0, \epsilon^k)$

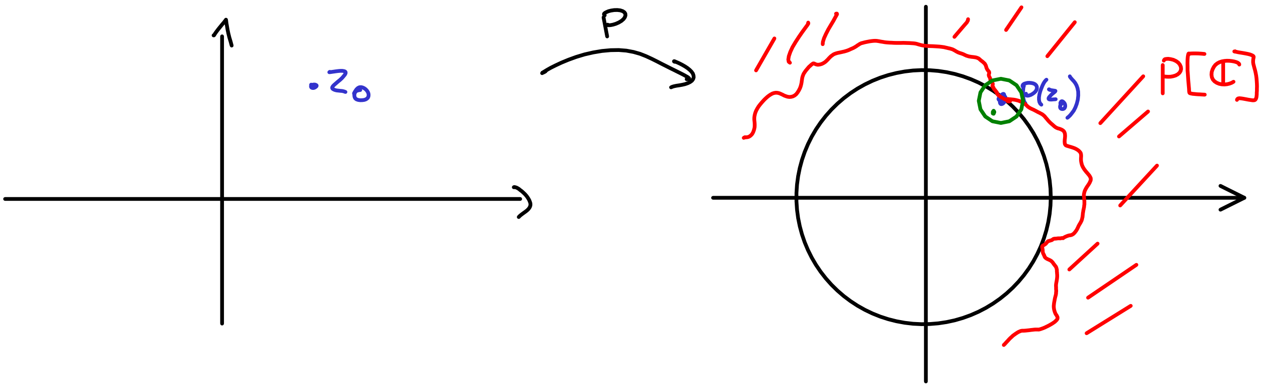
$$B(0, \epsilon^k) \subseteq \varphi^k[B(z_0, \delta)] \Rightarrow B(f(z_0), \epsilon^k) \subseteq f[B(z_0, \delta)]$$

Przykład.

Zasadnicze tw. algebry (każdy zespolony wielomian dodatniego stopnia ma zespolony pierwiastek) można udwodnić używając tw. o odwzorowaniu otwartym.

Najpierw (jak w dowodzie z użyciem tw. Liouville'a) uzasadniamy, że gdyby $P(z)$ nie miał pierwiastka, to funkcja $z \mapsto |P(z)|$ musiałaby przyjmować minimum w pewnym $z_0$.

Ale, na mocy tw. o odwzorowaniu otwartym, pewne koło $B(P(z_0), \epsilon)$ jest zawarte w $P[\mathbf{C}]$. W tym kole oczywiście są punkty o module mniejszymi niż $|P(z_0)|$ – sprzeczność.




**Twierdzenie** (zasada maksimum)

a) Jeśli $f$ jest niestałą funkcją holomorficzną w obszarze $\Omega$, to $|f|$ nie przyjmuje maksimum w $\Omega$.

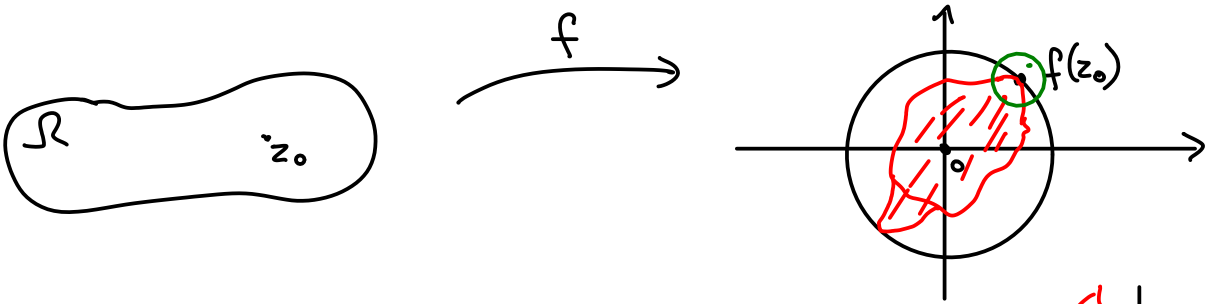
b) Niech $\Omega$ będzie obszarem o zwartym domknięciu $\overline{\Omega}$. Jeśli $f$ jest holomorficzna w $\Omega$ i ciągła na $\overline{\Omega}$, to

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq \sup_{z\in\overline{\Omega}\setminus\Omega} |f(z)|.$$

Dowód.

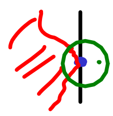
a) Jeśli $|f|$ przyjmowałaby maksimum w $z_0 \in \Omega$, to pewne koło $B(f(z_0), \epsilon)$ byłoby zawarte w $f[\Omega]$; ale w takim kole są punkty o module większymi niż $|f(z_0)|$ – sprzeczność.

b) Ciągła $|f|$ osiąga maksimum w zwartym $\overline{\Omega}$, ale – na mocy a) – nie w $\Omega$.




Podobnie dla

- maksimum $\mathrm{Re}(f)$



- minimum $\mathrm{Im} f + 4\mathrm{Re} f$
- minimum $|f|$ – o ile $f$ nie zeruje się w $\Omega$

...

# Osobliwości

**Definicja.** Mówimy, że funkcja ma w $z_0$ *osobliwość izolowaną,* jeśli jest określona i holomorficzna w pewnym nakłutym dysku $B'(z_0, r) := B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Przykłady. (osobliwości izolowane w $z_0 = 0$)

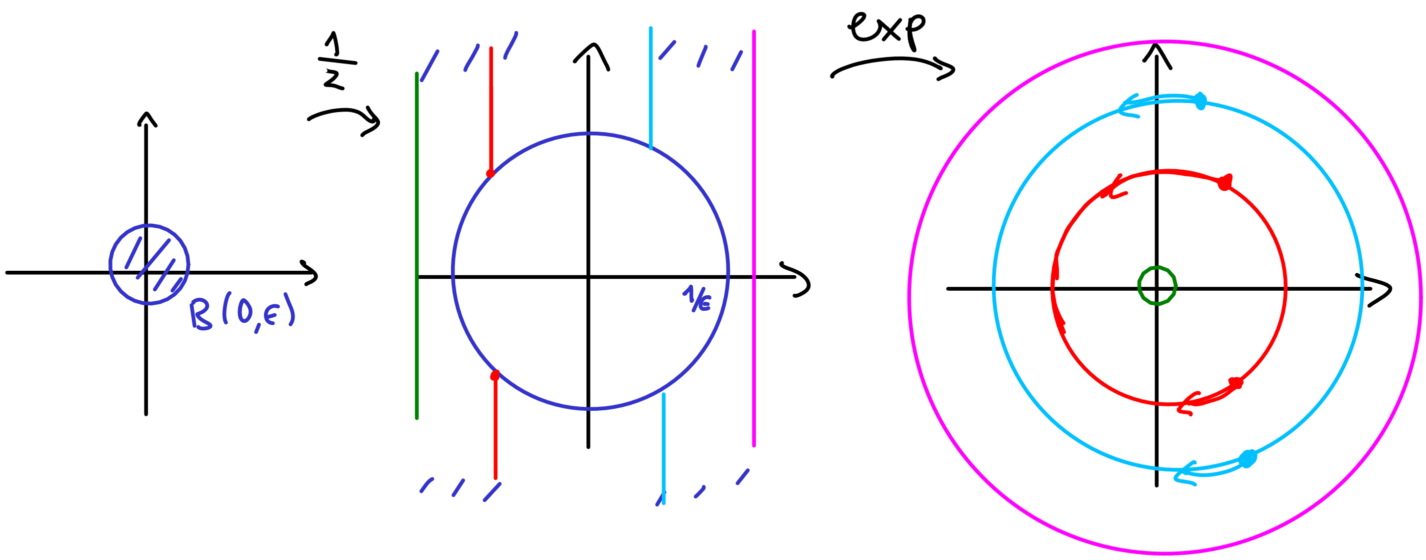
1) $f_1(z) = \frac{z^2}{z}$ ma *pozorną osobliwość* w zerze:
$f_1 \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \{0\})$, $f_1(z) = z$ dla $z \neq 0$;
jeśli dodefiniować $f_1(0) = 0$, to $f_1(z) = z$ dla wszystkich $z \in \mathbf{C}$.

2) $f_2(z) = \frac{1}{\sin z}$ dla $z \in B'(0, 1)$.

$$\lim_{z \to 0} f_2(z) = \infty$$

$f_2$ ma biegun w zerze.

3) $f_3(z) = e^{1/z}$ dla $z \in B'(0, 1)$ ma z zerze *osobliwość istotną.*
W każdym otoczeniu 0 funkcja $f_3$ przyjmuje każdą niezerową zespoloną liczbę jako wartość (i to nieskończenie wiele razy).




**Definicja.** Izolowaną osobliwość funkcji $f$ w punkcie $z_0$ nazywamy

1) *osobliwością pozorną* lub *usuwalną,* jeżeli $f$ rozszerza się do funkcji holomorficznej na otoczeniu $z_0$.
2) *biegunem,* jeżeli $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
3) *osobliwością istotną* – w pozostałych przypadkach.

## Osobliwość pozorna

**Fakt 1.**
Niech $f \in \mathcal{O}(B'(z_0, r))$ będzie ograniczona. Wtedy $f$ ma w $z_0$ osobliwość pozorną.

Dowód. Określmy na $B(z_0, r)$:

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{dla } z \neq z_0 \\ 0 & \text{dla } z = z_0 \end{cases}$$

Funkcja $g$ jest holomorficzna w $B'(z_0, r)$, ale i w $z_0$:

$$\frac{1}{h}\left(g(z_0+h) - g(z_0)\right) = \frac{1}{h}\left(h^2 f(z_0+h) - 0\right) = h \cdot f(z_0+h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad \Big| \; \begin{matrix} g'(z_0) \\ \shortparallel \\ 0 \end{matrix}$$

Rozwińmy $g$ w szereg potęgowy:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-2}}_{\substack{= f(z) \text{ dla } z \neq z_0, \\ \text{holomorficzne w } B(z_0, r)}}$$

$a_0 = g(z_0) = 0, \; a_1 = g'(z_0) = 0$

**Lemat.**
Jeśli niestała $f \in B(z_0, r)$ zeruje się w $z_0$, to istnieje jedyna liczba naturalna $n$, taka że dla $z \in B(z_0, r)$

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

gdzie $g \in \mathcal{O}(B(z_0, r))$ i $g(z_0) \neq 0$.

**Definicja.** Liczbę $n$ nazywamy *rzędem* lub *krotnością* zera $z_0$ funkcji $f$.

Dowód. Rozwijamy w szereg:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z-z_0)^k}_{\substack{g(z), \text{ holo w } B(z_0, r) \\ g(z_0) = a_n \neq 0}}$$

$n = \min\{k \mid a_k \neq 0\}$

Jednoznaczność: gdyby nie zachodziła, to

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) = (z-z_0)^m h(z) \qquad g(z_0), h(z_0) \neq 0.$$

bzo: $m > n$ $\qquad g(z) = (z-z_0)^{m-n} h(z)$

$z := z_0$: $\qquad \underset{0}{\neq} \; = \; \underset{0}{\shortparallel} \; \cdot \; \underset{0}{\neq}$ $\qquad$ sprzeczność.

## Biegun

Załóżmy, że $f$ ma biegun w $z_0$. Wtedy $\frac{1}{f}$ ma w $z_0$ granicę 0 – ma tam więc osobliwość pozorną, a jej holomorficzne rozszerzenie ma w $z_0$ zero pewnej krotności $n$:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n g(z); \qquad f(z) = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{g(z)}.$$

$g(z_0) \neq 0$

holomorficzna w otoczeniu $z_0$

$$= (z-z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-n}$$

dla $z \in B'(z_0, r)$

Mówimy, że $f$ ma w $z_0$ biegun *rzędu / krotności* $n$.

**Fakt 2.**

Jesli $f$ ma w $z_0$ biegun rzędu $n$, to na pewnym nakłutym dysku wokół $z_0$ rozwija się (jednoznacznie) w szereg postaci

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

**Definicja.** Część tego szeregu

$$\sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

nazywamy *częścią główną* $f$ w $z_0$.

Przykład. Funkcja $\sin z$ ma w 0 zero rzędu 1, zatem $\frac{1}{\sin z}$ ma w 0 biegun rzędu 1. Początek rozwinięcia w szereg:

$$\left(a_{-1}\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots\right) = 1$$

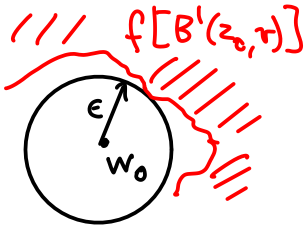
$$\underset{1}{\underset{\parallel}{a_{-1}}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{a_0}} z + \underset{0}{\underset{\parallel}{\left(a_1 - a_{-1}\cdot\frac{1}{6}\right)}} z^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6} z + \ldots$$

(tw Picarda – lepsza wersja)

## Osobliwość istotna

**Twierdzenie Casoratiego–Weierstrassa (Sochocki)**
Jeśli $f$ ma w $z_0$ osobliwość istotną, to obraz $B'(z_0, r)$ przez $f$ jest gęsty w $\mathbf{C}$ (dla dowolnie małego $r > 0$).




Dowód. Załóżmy nie wprost, że $w_0 \notin \overline{f[B'(z_0, r)]}$.
Wtedy $B(w_0, \epsilon) \cap f[B'(z_0, r)] = \emptyset$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Ale wówczas:

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \text{dla } z \in B'(z_0, r)$$

$$\left|\frac{1}{f(z) - w_0}\right| \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{dla } z \in B'(z_0, r)$$

Określmy

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \text{dla } z \in B'(z_0, r) \; ; \; g \text{ ograniczona}$$

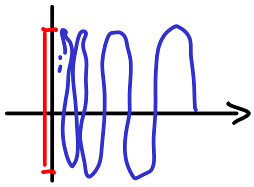
Zatem $g$ ma w $z_0$ osobliwość pozorną. Stąd

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$$

ma w $z_0$ albo osobliwość pozorną (gdy $g(z_0) \neq 0$), albo biegun (gdy $g(z_0) = 0$).

Sprzeczność.

Przykład.
Niech $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ dla $z \in B'(0, 1)$.
Granica $\lim\limits_{\mathbf{R} \ni x \to 0+} f(x)$ nie istnieje (ani jako liczba skończona, ani jako $\infty$).
W takim razie 0 nie jest ani osobliwością pozorną, ani biegunem $f$.
Wniosek: istnieje ciąg zespolony $(z_n)$ zbieżny do 0, taki że



$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = 7.$$

**Szereg Laurenta** $A(r,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$

**Twierdzenie.**
Niech $f \in \mathcal{O}(A(r,R))$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in A(r,R).$$

Rozwinięcie jest jednoznaczne. Szereg (zwany szeregiem Laurenta $f$) jest zbieżny bezwzględnie w $A(r,R)$ i zbiega w tymże zbiorze niemal jednostajnie do $f$.

Przykład. w $A(1,2)$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{(z-2)(z+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}\right) =$$

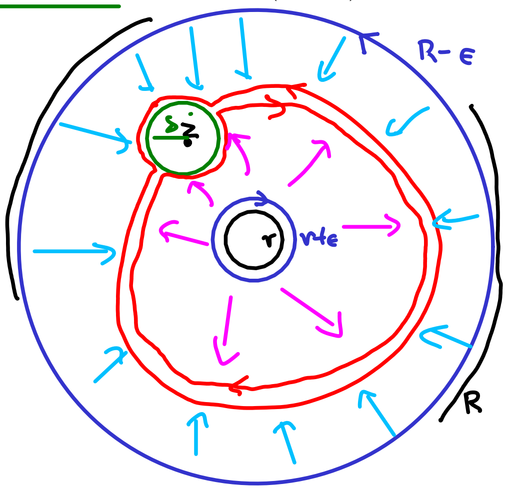
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

Dowód.

1) Weźmy mały $\epsilon > 0$. Dla $z \in A(r+\epsilon, R-\epsilon)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,\delta)} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R-\epsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r+\epsilon)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$




2) $$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\,\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n \leftarrow$$ zbiega jednostajnie względem $w \in \partial B(0, R-\epsilon)$

$$\|$$

$$-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^{n+1}} \leftarrow$$ zbiega jednostajnie względem $w \in \partial B(0, r+\epsilon)$

3) Dla $z \in A(r+\epsilon, R-\epsilon)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R-\epsilon)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{w^{n+1}}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r+\epsilon)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^{n+1}}dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,R-\epsilon)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)}_{a_n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r+\epsilon)} f(w)w^n dw\right) z^{-n-1}.$$

$$\|$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r+\epsilon)}\frac{f(w)}{w^{k+1}}dw\right)}_{a_k} z^k$$

4) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:
   - zbiega dla $z \in A(r+\epsilon, R-\epsilon)$;
   - ma promień zbieżności $\geq R-\epsilon$;
   - zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w $B(0, R-\epsilon)$.

   Szereg $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k-1} \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}$:
   - zbiega dla $z \in A(r+\epsilon, R-\epsilon)$;

     (Szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_{-k-1} x^{k+1}$:
     - zbiega dla $x \in A(\frac{1}{R-\epsilon}, \frac{1}{r+\epsilon})$;
     - ma promień zbieżności $\geq \frac{1}{r+\epsilon}$;
     - zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w $B(0, \frac{1}{r+\epsilon})$.)
   - zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w $\mathbf{C} \setminus \overline{B}(0, r+\epsilon)$.

   $\Rightarrow$ Szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w $A(r+\epsilon, R-\epsilon)$.

5) Jednoznaczność: dla $\rho \in (r+\epsilon, R-\epsilon)$

$$\int_{\partial B(0,\rho)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{\partial B(0,\rho)} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \right) z^{-n-1} dz$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{\partial B(0,\rho)} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$$

6) Wszystko powyżej jest prawdą dla dowolnego $\epsilon > 0$, przy czym współczynniki $a_n$ nie zależą od $\epsilon$. Stąd wynika, że szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ zbiega bezwzględnie i niemal jednostajnie w $A(r, R)$ – do funkcji $f(z)$.

Rozwinięcia Laurenta można dokonywać nie tylko wokół 0. Odpowiednie wzory wyglądają wówczas tak:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$