Residua

Fakt.

Niech $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ będzie rozwinięciem Laurenta funkcji $f \in \mathcal{O}(B'(z_0, R))$. Wtedy dla $\rho \in (0, R)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\rho)} f(z)dz = a_{-1}.$$

Definicja.

W założeniach faktu wspólną wartość obu stron jego tezy nazywamy *residuum f w z_0* i oznaczamy $\operatorname{Res}(f, z_0)$ (lub: $\operatorname{Res}_{z_0} f$, $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)dz$).

Jak liczyć residuum.

Jeśli f ma w z_0 biegun rzędu n, to

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right).$$

W szczególności dla bieguna rzędu 1 (tzw. bieguna prostego)

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

$$f(z) = a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \dots$$

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + \dots$$

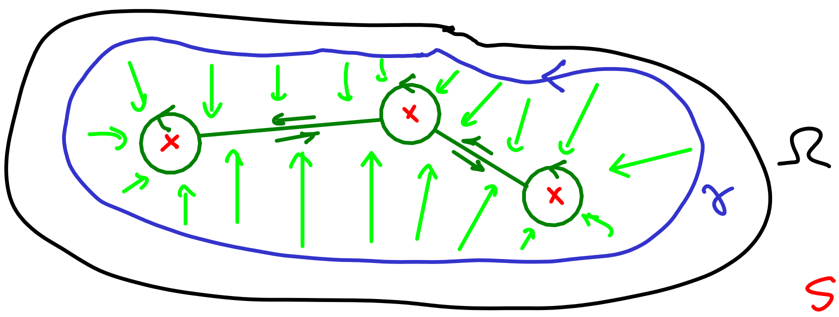
$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}: \quad 0 + \dots + 0 + (n-1)!\,a_{-1} + n!\,a_0(z-z_0) + \dots$$

$$z := z_0: \quad 0 + \dots + 0 + (n-1)!\,a_{-1} + 0 + 0 + \dots$$

Twierdzenie

Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$, gdzie S jest skończony. Załóżmy, że γ jest zamkniętą krzywą w $\Omega \setminus S$, homotopijną w $\Omega \setminus S$ z krzywą zbudowaną z okręgów $(\partial B(s,\epsilon))_{s\in S}$ (przebieganych każdy jednokrotnie z dodatnią orientacją) oraz pewnych zawartych w $\Omega \setminus S$ krzywych łączących te okręgi (przebieganych każda dwa razy, w przeciwne strony). Wtedy

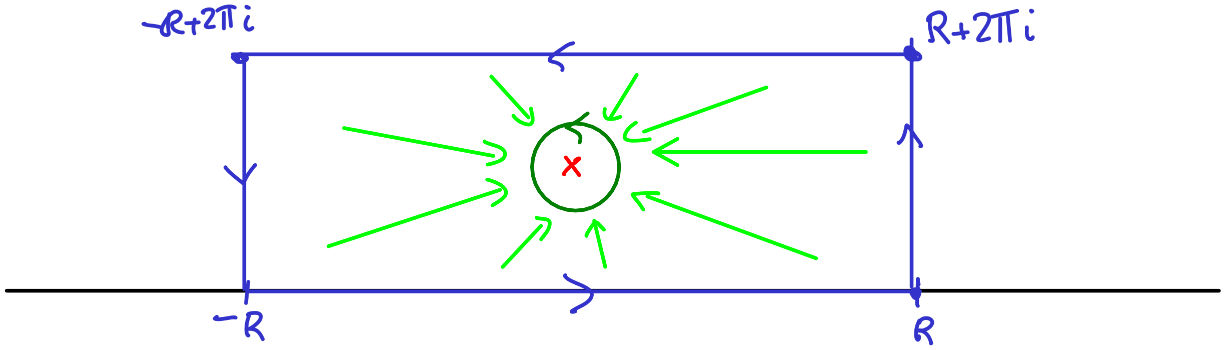
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{s\in S} 2\pi i \operatorname{Res}(f, s).$$



Przykład.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx, \qquad 0 < a < 1$$

- Scałkujemy $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$ po konturze γ_R:



- Bieguny f wewnątrz konturu:

$$1+e^z=0$$
$$e^z=-1$$
$$z=\pi i + k\cdot 2\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}$$

wewnątrz konturu: tylko πi

- $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,\pi i)$

- Liczymy residuum:

odwrotność ilorazu różnicowego funkcji e^z w $z_0=\pi i$

$$(z-\pi i)f(z) = (z-\pi i)\frac{e^{az}}{e^z-(-1)} = e^{az}\frac{z-\pi i}{e^z-e^{\pi i}} \xrightarrow[z\to\pi i]{} e^{a\pi i}\cdot\frac{1}{\frac{d}{dz}e^z\Big|_{z=\pi i}} =$$

$$= e^{a\pi i}\frac{1}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$$

biegun f w πi jest prosty (rzędu 1), a to jest residuum.

- Analizujemy całki po poszczególnych kawałkach konturu:

$$\int_{\square} = \int_{\rightarrow} + \int_{\leftarrow} + \int_{\uparrow} + \int_{\downarrow}$$

$$1)\ \int_{\rightarrow} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz =: I$$

2) $$\int_{\leftarrow} = -\int_{[-R+2\pi i,\,R+2\pi i]} \frac{e^{az}}{1+e^{z}}\,dz = -\int_{[-R,R]} \frac{e^{a(z+2\pi i)}}{1+e^{z+2\pi i}}\,dz = -e^{a\cdot 2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{az}}{1+e^{z}}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} -e^{a\cdot 2\pi i}\cdot I$$

3) $$\int_{\uparrow} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \left|\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad (a<1)$$

$$\ell(\uparrow) = 2\pi$$

4) $$\int_{\downarrow} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \left|\frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\right| \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad (a>0)$$

$$\ell(\downarrow) = 2\pi$$

- Podsumowanie:

$$2\pi i\left(-e^{a\pi i}\right) = \int_{\square} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} I - e^{a\cdot 2\pi i} I$$

Stąd

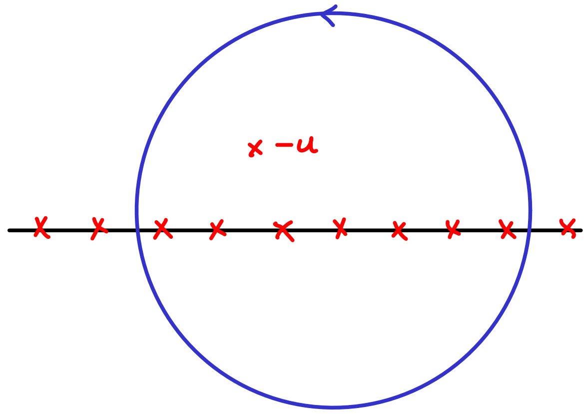
$$I = \frac{2\pi i\left(-e^{a\pi i}\right)}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Przykład.

$u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$f(z) = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{(z+u)^2}$$

Zadanie: $\lim_{N\to\infty} \int_{\partial B(0,N+\frac{1}{2})} f(z)dx = 0$. (Wsk. $|\operatorname{ctg}(\pi z)| < C$ dla $z \notin \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} B(k,\epsilon)$)



$$\int_{\partial B(0,N+\frac{1}{2})} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{s\in B(0,N+\frac{1}{2})} \operatorname{Res}(f,s)$$

Bieguny f:

1) $z = n \in \mathbb{Z}$

$$(z-n)f(z) = (z-n)\frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{(z+u)^2} = \frac{z-n}{\sin \pi z}\;\frac{\pi\cos\pi z}{(z+u)^2} = \frac{\pi z - \pi n}{\sin\pi z - \sin\pi n}\cdot\frac{\cos\pi z}{(z+u)^2}$$

odwrotność ilorazu różnicowego sinusa w $z_0 = \pi n$

$$\Big\downarrow z\to n$$

$$\frac{1}{\cos\pi n}\cdot\frac{\cos\pi n}{(n+u)^2} = \frac{1}{(n+u)^2}$$

Biegun jest prosty; to jest residuum. $\longrightarrow \frac{1}{(n+u)^2}$

2) $z = -u$ biegun rzędu 2

$$\operatorname{Res}(f(z),-u) = \lim_{z\to -u}\frac{d}{dz}\Big((z+u)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to -u}\frac{d}{dz}\big(\pi \operatorname{ctg}\pi z\big) =$$

$$= -\left.\frac{\pi\cdot\pi}{\sin^2(\pi z)}\right|_{z=-u} = -\frac{\pi^2}{\sin^2\pi u}$$

$$0 \xleftarrow[\infty\leftarrow N]{} \int_{\partial B(0,N+\frac{1}{2})} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(u+n)^2} - 2\pi i\,\frac{\pi^2}{\sin^2\pi u}$$

Wniosek

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi u}$$

Osobliwość w nieskończoności

Funkcja $f \in \mathcal{O}(A(R, \infty))$ ma "izolowaną osobliwość w ∞". Jak tę osobliwość badać?

Określamy $F(z) = f(\frac{1}{z})$. Wtedy $F \in \mathcal{O}(B'(0, \frac{1}{R}))$. Zachowanie F w pobliżu zera jest takie jak zachowanie f w pobliżu nieskończoności.

Definicja.
Mówimy, że f ma w nieskończoności osobliwość pozorną / biegun / osobliwość istotną, jeśli F ma w zerze osobliwość pozorną / biegun / osobliwość istotną.

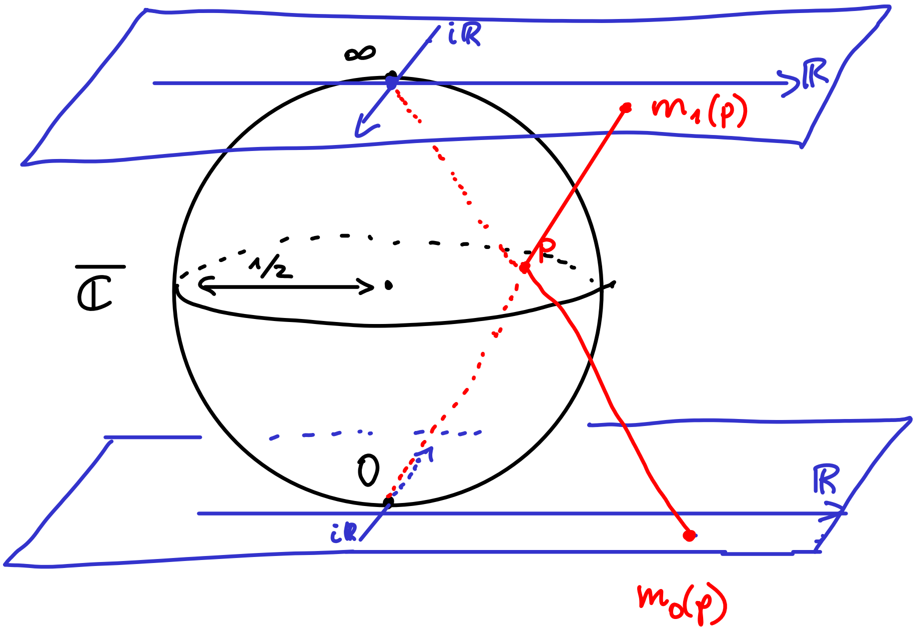
Przykłady.

1) e^z ma w ∞ osobliwość istotną, bo $e^{1/z}$ ma w zerze osobliwość istotną

2) z^2 ma w ∞ biegun, bo $\frac{1}{z^2}$ ma w zerze biegun

3) $\frac{1}{z}$ ma w ∞ osobliwość pozorną, bo z ma w zerze osobliwość pozorną

Sfera Riemanna

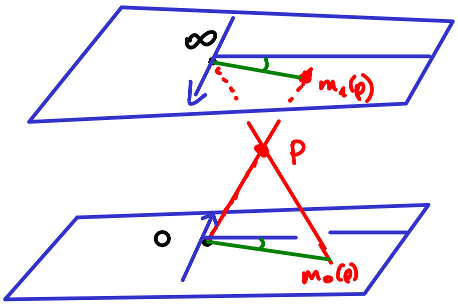


m_1 utożsamia $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ z $\mathbf{C}$

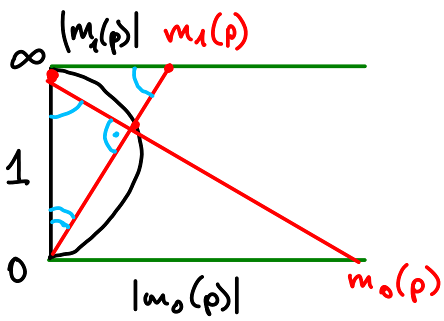
m_0 utożsamia $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{\infty\}$ z $\mathbf{C}$

Lemat
Jeśli $m_0(p) = z$, to $m_1(p) = \frac{1}{z}$.

Dowód.
Rozważmy płaszczyznę, w której leżą 0, ∞, p, $m_0(p)$ i $m_1(p)$.



$\arg m_0(p) = -\arg m_1(p)$



$\triangle\, m_0(p)\, 0\, \infty \sim \triangle\, 0\, \infty\, m_1(p)$

$$\frac{|m_0(p)|}{1} = \frac{1}{|m_1(p)|}$$

Wniosek
Funkcja $m_1 \circ m_0^{-1} \colon \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ jest dana wzorem $z \mapsto \frac{1}{z}$;
w szczególności jest ona ciągła i holomorficzna (odwrotna do niej też).

Definicja.

Sfera Riemanna to zbiór $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ wyposażony w dwie *mapy:*

$$m_0 \colon U_0 = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{\infty\} \ni z \mapsto z \in \mathbf{C}, \qquad m_1 \colon U_1 = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbf{C},$$

przy użyciu których

(1) określamy w $\overline{\mathbf{C}}$ topologię;

(2) badamy holomorficzność funkcji $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$ określonych na otwartych $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$.

(1) Zbiór $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ jest otwarty, jeśli $m_0(\Omega \cap U_0)$ i $m_1(\Omega \cap U_1)$ są otwarte w $\mathbf{C}$.
Ciąg (z_n) punktów $\overline{\mathbf{C}}$ zbiega do $z \in \overline{\mathbf{C}}$, jeśli
a) $z \in U_0$, $z_n \in U_0$ dla dostatecznie dużych n oraz $m_0(z_n) \to m_0(z)$;
lub
b) $z \in U_1$, $z_n \in U_1$ dla dostatecznie dużych n oraz $m_1(z_n) \to m_1(z)$.

(2) Niech $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$ będzie otwarty, $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$. Funkcja f jest holomorficzna, jeśli $f \circ m_0^{-1}$ i $f \circ m_1^{-1}$ są (na swoich dziedzinach) holomorficzne.

Uwaga

W (1): jeśli $z \in U_0 \cap U_1$, to warunki a) i b) są równoważne, bo $m_1 \circ m_0^{-1}$ jest ciągła (i $m_0 \circ m_1^{-1}$ też).

W (2): jeśli $p \in U_0 \cap U_1$, to
holomorficzność $f \circ m_1^{-1}$ w $m_1(p)$ jest równoważna
holomorficzności $f \circ m_0^{-1}$ w $m_0(p)$, bo

$$f \circ m_0^{-1} = (f \circ m_1^{-1}) \circ (\underbrace{m_1 \circ m_0^{-1}}_{\text{holomorficzna}})$$

Twierdzenie

Niech $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}})$. Wtedy f jest stała.

Dowód. $f \colon \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ jest ciągła, a $\overline{\mathbf{C}}$ jest zwarta - f jest więc ograniczona. W takim razie obcięcie $f|_{\mathbf{C}} \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ jest ograniczone, i – na mocy tw. Liouville'a – stałe. Stąd f jest stała.