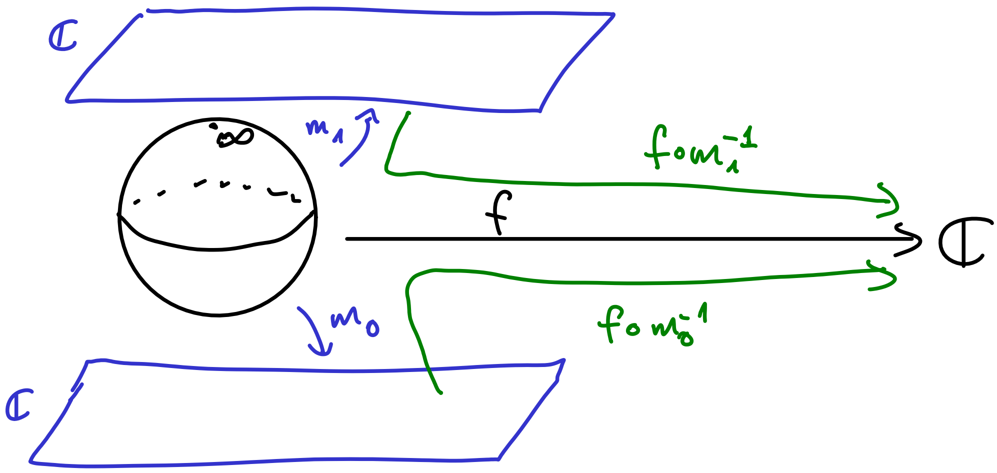
Sfera Riemanna

Definicja.
Sfera Riemanna to zbiór $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ wyposażony w dwie *mapy:*

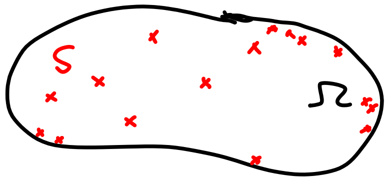
$$m_0 \colon U_0 = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{\infty\} \ni z \mapsto z \in \mathbf{C}, \qquad m_1 \colon U_1 = \overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbf{C},$$

przy użyciu których
(1) określamy w $\overline{\mathbf{C}}$ topologię;
(2) badamy holomorficzność funkcji $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$ określonych na otwartych $\Omega \subseteq \overline{\mathbf{C}}$.



Twierdzenie
Niech $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}})$. Wtedy f jest stała.

Dowód. $f \colon \overline{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ jest ciągła, a $\overline{\mathbf{C}}$ jest zwarta - f jest więc ograniczona. W takim razie obcięcie $f|_{\mathbf{C}} \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ jest ograniczone, i – na mocy tw. Liouville'a – stałe. Stąd f jest stała.



Funkcje meromorficzne

Definicja.

Funkcję f nazywamy *meromorficzną* na otwartym zbiorze Ω (ozn. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$), jeśli jest holomorficzna na zbiorze $\Omega \setminus S$, gdzie $S \subset \Omega$, a w każdym z punktów $s \in S$ ma osobliwość izolowaną typu biegun.

Uwaga.

Zbiór S w powyższej definicji nie może mieć punktów skupienia w Ω (choć może je mieć w $\partial\Omega$) oraz jest przeliczalny.

Przykłady.

1) $\frac{1}{z} + \frac{3}{(z+2)^5} + z^7 \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$; $S = \{0, -2, \infty\}$.

2) $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, ale nie jest w $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$; tak samo $\operatorname{ctg} z$.

3) $\operatorname{ctg} \frac{1}{z} \in \mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, ale nie jest w $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Twierdzenie (GAGA)

Niech $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$. Wtedy f jest funkcją wymierną – ilorazem wielomianów.

Dowód.

$f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}} \setminus S)$ gdzie S jest skończony.

Dla $s \in S \cap \mathbf{C}$ niech $P_s(z)$ będzie częścią główną $f(z)$ w s.

Jeśli f ma biegun w ∞, to

$f(\frac{1}{z})$ ma w 0 część główną $\sum_{k=-n}^{-1} a_k z^k$

Niech $P_\infty(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k z^{-k} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{-\ell} z^{\ell}$

Zauważmy, że funkcja

$$f(z) - \sum_{s \in S} P_s(z)$$

ma w punktach $s \in S$ osobliwości pozorne – zatem rozszerza się do funkcji z $\mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}})$, czyli jest stała. Stąd

$$f(z) = \text{const} + \sum_{s \in S} P_s(z) \in \mathbf{C}(z)$$

.

Definicja.

Rząd funkcji meromorficznej f w punkcie p to liczba całkowita n, taka że w otoczeniu pierścieniowym p zachodzi

$$f(z) = (z-p)^n g(z),$$

gdzie g jest holomorficzna w otoczeniu p i $g(p) \neq 0$. Innymi słowy, jest to pierwszy wykładnik pojawiający się w szeregu Laurenta f w p. Oznaczenie: $\operatorname{ord}_p(f)$.

Przykład.

Wybierzmy dowolny punkt $p \in \mathbf{C}$. Ile jest funkcji $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$, które nie mają biegunów poza p, zaś w p mają najwyżej biegun prosty (tj. $\operatorname{ord}_p(f) \geq -1$)?

Np. $\frac{1}{z-p}$ jest taka $\left(\text{w } \infty: \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z-p} = 0 \right)$

Ogólniej: $c_0 + \frac{c_1}{z-p}$

Każda z szukanych funkcji jest powyższej postaci.

- Jeśli f nie ma bieguna w p, to $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}})$ i f jest stała.
- Jeśli f ma w p biegun z residuum c_1, to

$$f(z) - \frac{c_1}{z-p} \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}}), \quad f(z) - \frac{c_1}{z-p} = c_0$$

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z-p}$$

$$V = \{ f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}}) \mid f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}} \setminus \{p\}), \operatorname{ord}_p(f) \geq -1 \}$$

jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{C}$ wymiaru 2.

Zadanie.

Niech $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{C}$, $n_1, \ldots, n_k > 0$,

$$V = \{ f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}}) \mid f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbf{C}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}), \operatorname{ord}_{p_i}(f) \geq -n_i \}.$$

Wtedy $\dim_{\mathbf{C}} V = 1 + \sum n_i$.

Meromorficzność to holomorficzność

Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ i niech $s \in \Omega$ będzie n-krotnym biegunem f. Złóżmy f obciętą do sąsiedztwa s z mapą m_1:

$$B'(s,r) \ni z \xmapsto{\ f\ } (z-s)^{-n} g(z) \xmapsto{\ m_1\ } (z-s)^{n} \frac{1}{g(z)}$$

$$g(s) \neq 0$$

$m_1 \circ f$ ma w s osobliwość pozorną; po jej usunięciu ma tam zero krotności n.

Jeśli zdefiniować $F\colon \Omega \to \overline{\mathbf{C}}$ wzorem

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \in \Omega \setminus S \\ \infty & \text{dla } z \in S \end{cases}$$

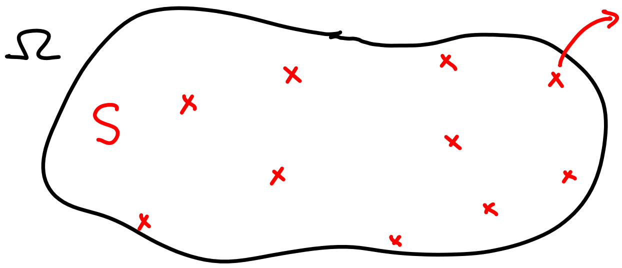
to F bedzie ciągła, a $m_1 \circ F$ oraz $m_0 \circ F$ bedą holomorficzne na swych dziedzinach. Mówimy, że $F\colon \Omega \to \overline{\mathbf{C}}$ jest holomorficzna.

W szczególności funkcję wymierną $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbf{C}})$ można traktować (po rozszerzeniu do F) jak holomorficzne odwzorowanie $\overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$.

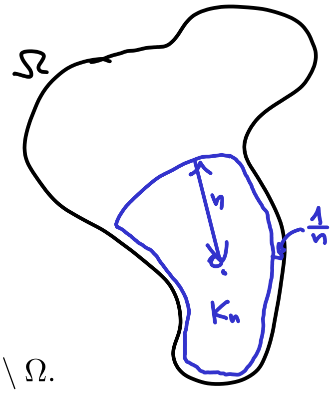
$(\Omega \subseteq \mathbb{C})$

Twierdzenie (Mittag-Leffler)

Na dowolnym zbiorze otwartym Ω istnieje funkcja meromorficzna o dowolnie zadanym (przeliczalnym, bez punktów skupienia w Ω) zbiorze biegunów i dowolnie zadanych częściach głównych.



$$P_s(z) = \sum_{k=-n(s)}^{-1} a_{k,s} (z-s)^k$$



Dowód.

1) Wyczerpanie: $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, gdzie

a) K_n są zwarte,

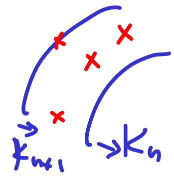
b) $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$

c) każda ograniczona składowa $\mathbf{C} \setminus K_n$ ma niepusty przekrój z $\mathbf{C} \setminus \Omega$.

$$K_n = \mathbb{C} \setminus U_n \quad , \quad U_n = \bigcup_{z \notin \Omega} B(z, \tfrac{1}{n}) \cup \underline{\left(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,n)\right)}$$

2) Niech $S \subset \Omega$ będzie zadanym zbiorem biegunów, a $(P_s(z))_{s \in S}$ niech będą zadanymi częściami głównymi.

Niech $f_n(z) = \sum_{s \in S \cap (K_{n+1} \setminus K_n)} P_s(z)$ $\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad K_0 = \emptyset$



Runge: $\exists\, g_n \in \mathcal{O}(\Omega)\ \forall z \in K_n\ |f_n(z) - g_n(z)| < \frac{1}{2^n}$

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(z) - g_n(z)\right)$$

Na $\mathrm{Int}\, K_n$ szereg od n-tego wyrazu zbiega do funkcji holomorficznej (jednostajnie), a pozostałe wyrazy produkują funkcję meromorficzną o zadanych częściach głównych. $\square$

Indeks krzywej względem punktu

Fakt.

Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$ będzie krzywą kawałkami C^1; niech $\gamma(a) = \exp(\ell_a)$. Funkcja $L\colon [a,b] \to \mathbf{C}$ dana wzorem

$$L(t) = \ell_a + \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z}$$

jest *ciągłym logarytmem* γ, tzn. ciągłą funkcją spełniającą $\exp \circ L = \gamma$.

Dowód.

Ciągłość widać z przedstawienia $L(t) = \ell_a + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$. Dalej liczymy

$$\frac{d}{dt}(e^{-L(t)}\gamma(t)) = e^{-L(t)}\left(-L'(t)\cdot\gamma(t) + \gamma'(t)\right)$$

$$= e^{-L(t)}\left(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\cdot\gamma(t) + \gamma'(t)\right) = 0$$

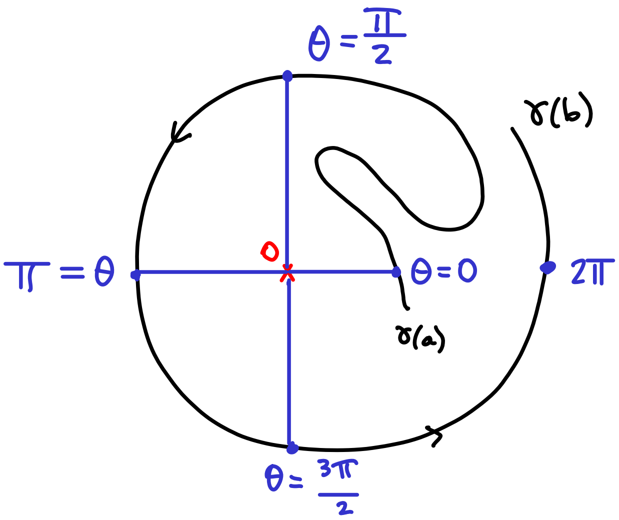
Stąd $e^{-L(t)}\gamma(t) = \text{const} = e^{-L(a)}\gamma(a) = e^{-\ell_a}\gamma(a) = 1$

Czyli $e^{L(t)} = \gamma(t)$

$$e^{L(t)} = e^{\rho + i\theta} = e^{\rho}\cdot e^{i\theta} = \gamma$$

$$L(t) = \underbrace{\rho(t)}_{\operatorname{Log}|\gamma(t)|} + i\underbrace{\theta(t)}_{\arg \gamma(t)}$$

Funkcja $\theta(t) = \operatorname{Im} L(t)$ jest *ciągłym argumentem* γ:
ciągłą funkcją $\theta\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ spełniającą $\theta(t) = \arg\gamma(t)$.

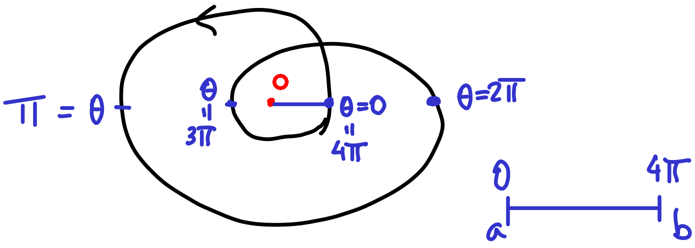


Jeśli γ jest dodatkowo zamknięta:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = L(b)-L(a) = (\rho(b)+i\theta(b)) - (\rho(a)+i\theta(a)) = i\,(\underbrace{\theta(b)-\theta(a)})$$

$$\log|\gamma(b)| = \log|\gamma(a)|$$

różnica dwóch argumentów liczby $\gamma(a)=\gamma(b)$;
$\in 2\pi\cdot\mathbb{Z}$



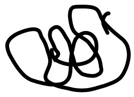
$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$ to liczba obiegów zera wykonana przez γ.

Definicja.
Niech γ będzie zamkniętą kawałkami C^1 krzywą w $\mathbf{C}\setminus\{z_0\}$.
Indeksem krzywej γ *względem punktu* z_0 lub *indeksem punktu* z_0 *względem krzywej* γ nazywamy liczbę

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Własności

1) Wyrażenie $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$:
   - jest holomorficzną funkcją z_0 (Morera); $(z_0 \notin \gamma^*)$
   - ma wartości całkowite – jest więc stałe na składowych dopełnienia γ^*;
   - dla z_0 z nieograniczonej składowej $\mathbf{C}\setminus\gamma^*$ jest równe 0 – bo... gdy $z_0\to\infty$



$\frac{1}{z-z_0}\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{z_0\})$ $\dot{z}_0$

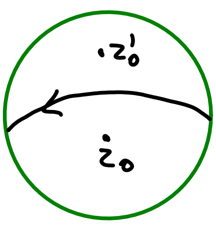
$$\lim_{z_0\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$$

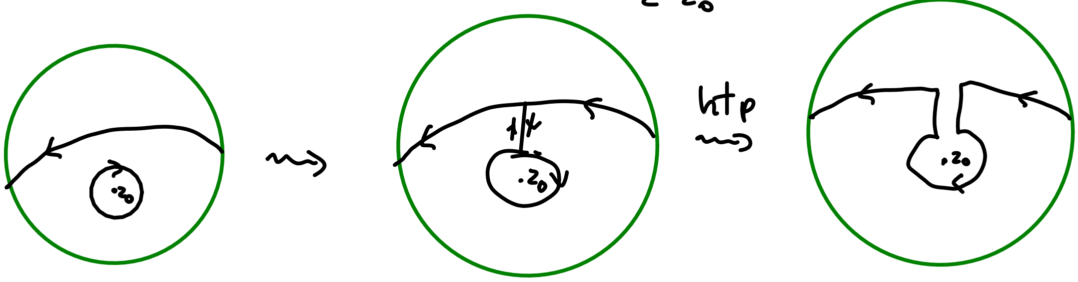
bo $\frac{1}{z-z_0} \underset{\gamma^*}{\rightrightarrows} 0$ gdy $z_0\to\infty$

2) Jak zmienia się $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ gdy przesuwamy z_0 do sąsiedniej składowej $\mathbf{C}\setminus\gamma^*$?

$\mathrm{Ind}_\gamma z_0$ vs $\mathrm{Ind}_\gamma z_0'$?

$\frac{1}{z-z_0}\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{z_0\})$



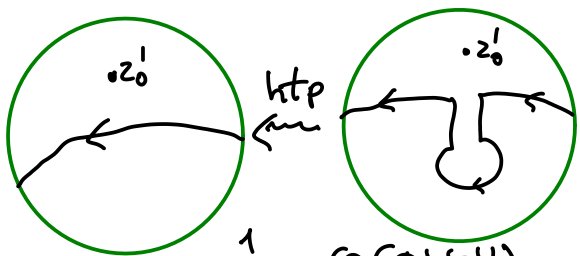


≀ w składowej

$$\underline{\mathrm{Ind}_\gamma z_0 - 1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{dz}{z-z_0}$$

$$\parallel$$

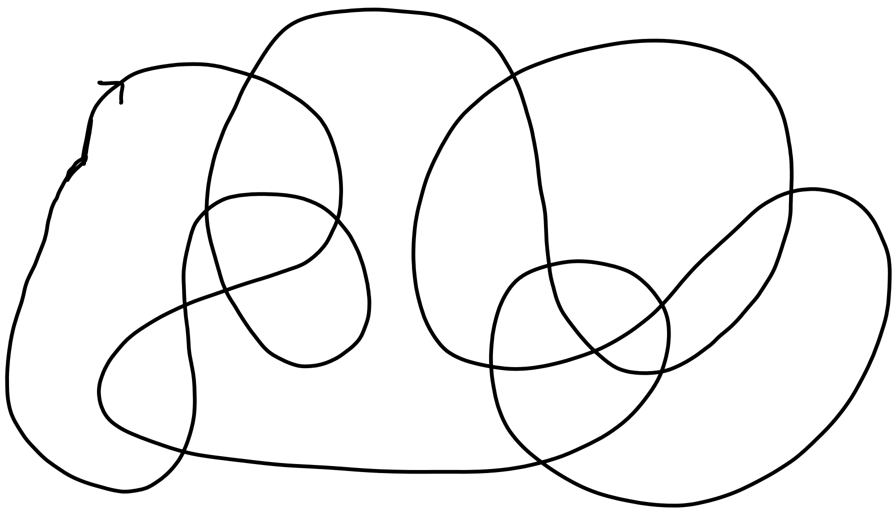
$$\underline{\mathrm{Ind}_\gamma z_0'}$$



$\frac{1}{z-z_0'}\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{z_0'\})$

Przykład.

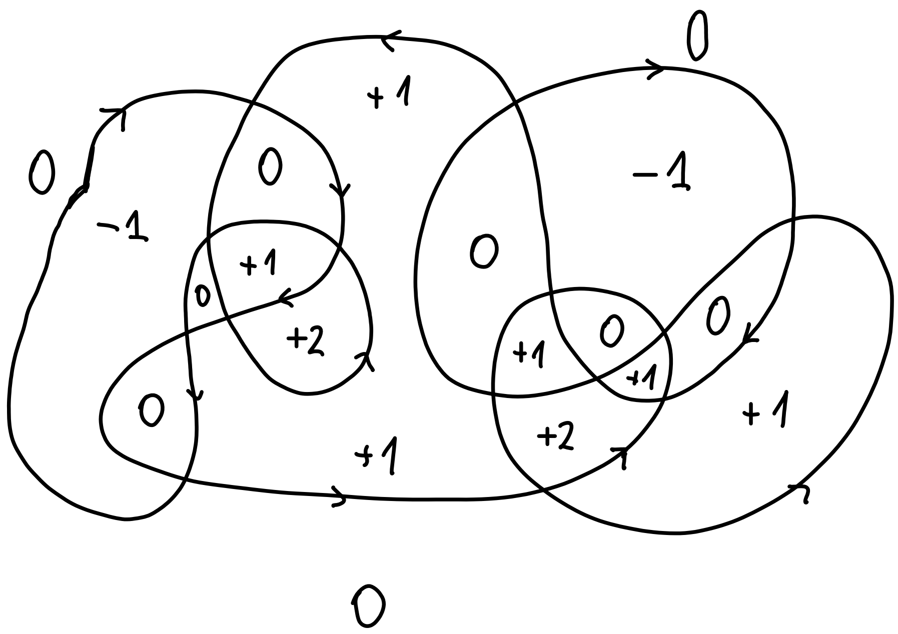
Załóżmy, że zamknięta krzywa γ nie ma potrójnych samoprzecięć ani samostyczności. Składowe jej dopełnienia można wtedy pokolorować dwoma kolorami w szachownicę. (Składowe sąsiadujące przez łuk krzywej mają mieć różny kolor.)



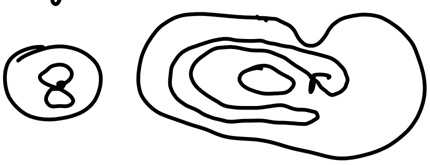
Rozw:

kolorujemy z_0 kolorem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \mod 2$$

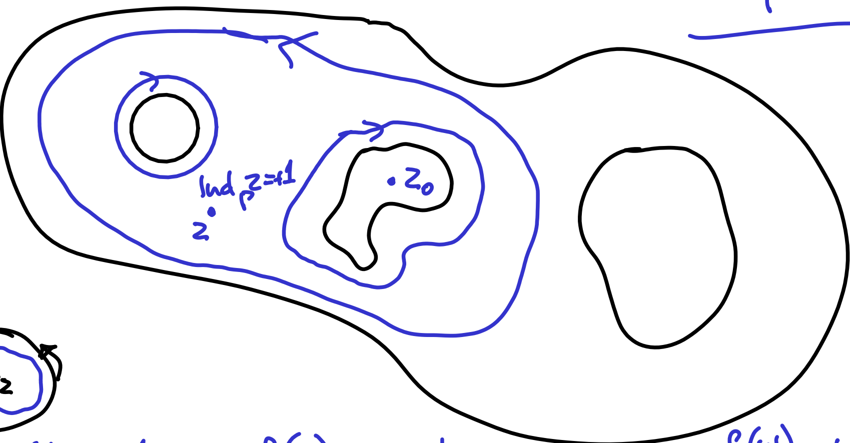


$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \to \int_\gamma$$

$$\Gamma = \bigcup \gamma_i \qquad \operatorname{Ind}_\Gamma z_0 = 0$$



$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = +1$

$$f(z)\cdot \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$