Homologie

Łańcuch (singularny) w Ω to formalna suma krzywych C^1 z całkowitymi współczynnikami:

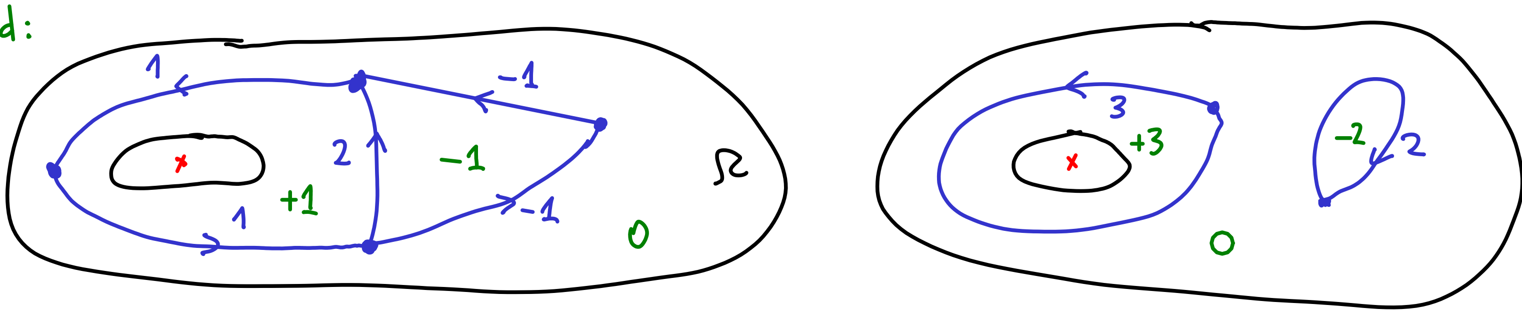
$$c = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \ldots + n_k\gamma_k, \qquad \gamma_i\colon [0,1] \to \Omega.$$

Brzeg łańcucha to formalna suma punktów Ω:

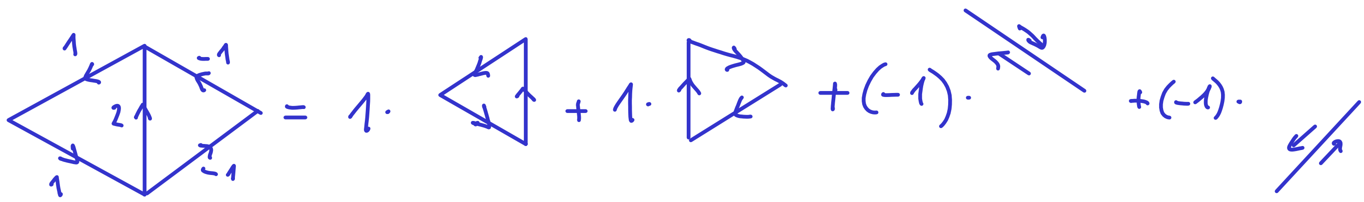
$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} n_i \partial\gamma_i = \sum_{i=1}^{k} n_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)).$$

Łańcuch c nazywamy *cyklem*, jeśli $\partial c = 0$.

Ind:



Lemat (zadanie)
Każdy cykl przedstawia się jako kombinacja zamkniętych krzywych kawałkami C^1.



Cykl $\Gamma = n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$ ma *nośnik* $\Gamma^* = \bigcup_{n_i \neq 0} \gamma_i^*$.
Dla cyklu $\Gamma = \sum n_i\gamma_i$ i punktu $z_0 \notin \Gamma^*$ określamy indeks

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) = \sum \frac{n_i}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z - z_0}.$$

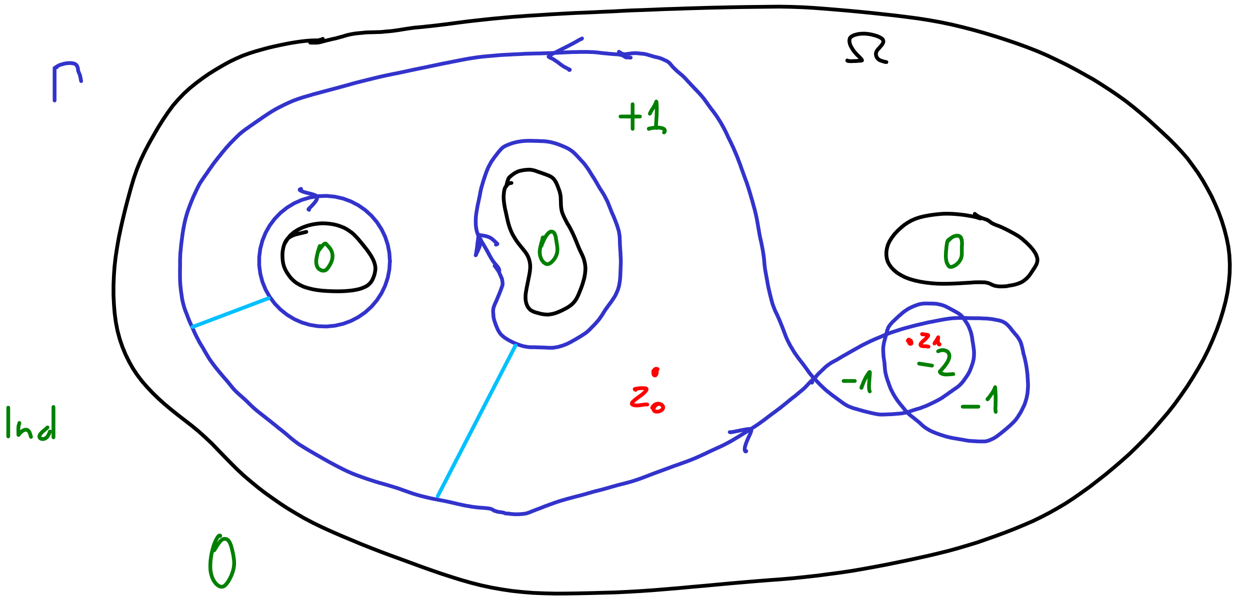
Jest on liczbą całkowitą z powodu Lematu.

Cykl Γ jest w Ω *homologiczny zeru* (Γ jest homologicznie trywialny, $\Gamma \sim 0$, Γ jest brzegiem), jeśli dla każdego $z_0 \notin \Omega$ zachodzi $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$.

Przykład 1. Zamknięta krzywa ściągalna (tj. homotopijna ze stałą).

Przykład 2. Zamknięta krzywa w jednospójnym zbiorze.

Przykład 3.



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw \quad ; \quad f(z_1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z_1}\, dw$$

Twierdzenie (globalne Cauchy'ego)

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem, $f \in O(\Omega)$, Γ niech będzie cyklem w Ω homologicznym zeru. Wtedy

a)
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

b)
$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad \text{dla } z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

Dowód. Rozważmy następującą funkcję $g\colon \Omega\times\Omega \to \mathbf{C}$:

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{dla } w \neq z \\ f'(z) & \text{dla } w = z \end{cases}$$

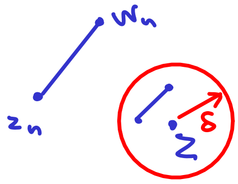
Lemat
Funkcja g jest ciągła na $\Omega\times\Omega$ i holomorficzna względem z.

Dowód Lematu:
Ciągłość jest podejrzana jedynie w punktach postaci (z,z). Niech $(w_n, z_n) \to (z,z)$.

$$g(z_n,w_n) = \begin{cases} \dfrac{f(w_n)-f(z_n)}{w_n-z_n} = \dfrac{1}{w_n-z_n}\displaystyle\int_{[z_n,w_n]} f'(\zeta)\,d\zeta \xrightarrow{(*)} f'(z) \\ f'(z_n) \longrightarrow f'(z) \end{cases}$$

$$(*)\quad \left|\frac{1}{w_n-z_n}\int_{[z_n,w_n]} f'(\zeta)\,d\zeta - f'(z)\right| = \frac{1}{|w_n-z_n|}\left|\int_{[z_n,w_n]} (f'(\zeta)-f'(z))\,d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta\in[z_n,w_n]} |f'(\zeta)-f'(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{w_n-z_n}\int_{[z_n,w_n]} f'(z)\,d\zeta$$



□(L)

Definiujemy na Ω holomorficzną funkcję h:

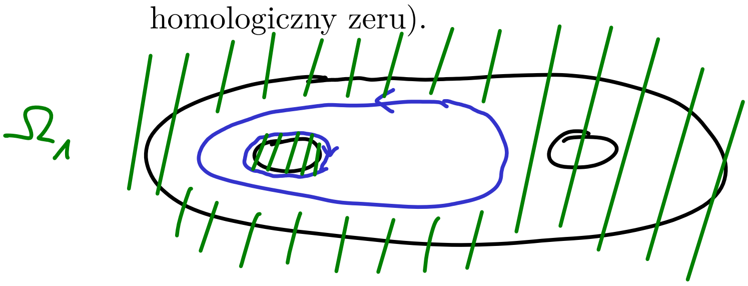
$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} n_k \cdot \int_0^1 \underbrace{g(z,\gamma_k(t))\,\gamma_k'(t)}_{\substack{\text{funkcja } (z,t) \\ \text{ciągła na } \Omega\times[0,1] \\ \text{holomorficzna względem } z}}\,dt$$

$\parallel$ dla $z \notin \Gamma^*$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw$$

Morera: $h \in \mathcal{O}(\Omega)$

Niech $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$. Zauważmy, że $\mathbf{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_1$ (bo Γ jest w Ω homologiczny zeru).



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ \Omega \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathbb{C} \\ \Omega_1 \arrow[r, "h_1"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Na Ω_1 definiujemy holomorficzną funkcję h_1:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Dla $z \in \Omega \cap \Omega_1$ zachodzi $h(z) = h_1(z)$:

$$h(z) - h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{-f(z)}{w-z} dw = (-f(z)) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} =$$

$$= (-f(z)) \, \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \underset{z \in \Omega_1}{=} (-f(z)) \cdot 0 = 0$$

Zatem funkcje h i h_1 można połączyć w jedną funkcję całkowitą:

$$h \cup h_1 \colon \Omega \cup \Omega_1 = \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

Ta funkcja jest ograniczona ($\lim_{z\to\infty} h_1(z) = 0$), więc (z tw. Liouville'a) stała – i równa zeru.

$$\underset{z \in \Omega \setminus \Gamma^*}{0 = h(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \qquad (\text{stąd b})$$

$\underline{b \Rightarrow a}$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \frac{(z-z_0) f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) \cdot \big(\underbrace{(z_0 - z_0)}_{=0} f(z_0)\big) = 0 \qquad \blacksquare$$

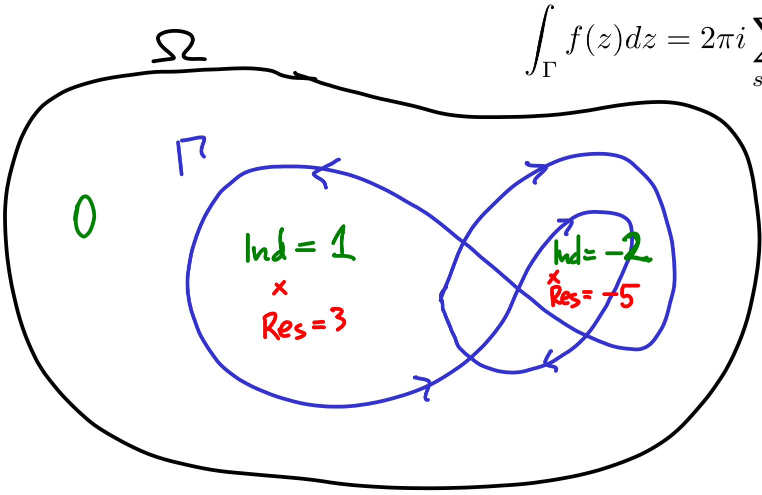
niech $z_0 \in \Omega$

$z_0 \notin \Gamma^*$

Twierdzenie (o residuach)

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem, S skończonym lub przeliczalnym podzbiorem Ω niemającym punktów skupienia w Ω, zaś $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$. Niech Γ będzie homologicznym zeru cyklem w Ω o nośniku rozłącznym z S. Wtedy

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \mathrm{Res}(f, s)\mathrm{Ind}_\Gamma(s).$$



$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\,(3\cdot 1 + (-5)\cdot(-2)) = 2\pi i\,(13) = 26\pi i$$

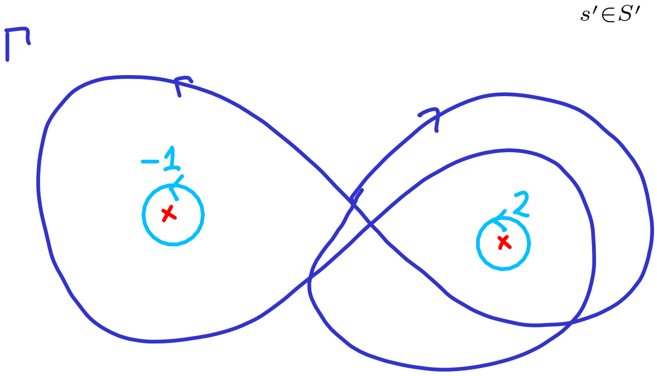
Dowód.

Zbiór $K = \{z \in \Omega \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\} \cup \Gamma^*$ jest zwartym podzbiorem Ω.

Niech $S' = S \cap K$; zbiór S' jest skończony.

Weźmy dostatecznie mały ϵ i połóżmy

$$\Gamma' = \Gamma + \sum_{s' \in S'} (-\mathrm{Ind}_\Gamma(s'))\partial B(s', \epsilon).$$



Cykl Γ' jest homologiczny zeru w $\Omega \setminus S$. Stosujemy (globalne) tw. Cauchy'ego:

$$0 = \int_{\Gamma'} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{s' \in S'} \mathrm{Ind}_\Gamma(s') \cdot \int_{\partial B(s',\epsilon)} f(z)\,dz =$$

$$= \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{s' \in S'} \mathrm{Ind}_\Gamma(s') \cdot 2\pi i\, \mathrm{Res}\,(f, s')$$

$\square$

Twierdzenie (zasada argumentu)

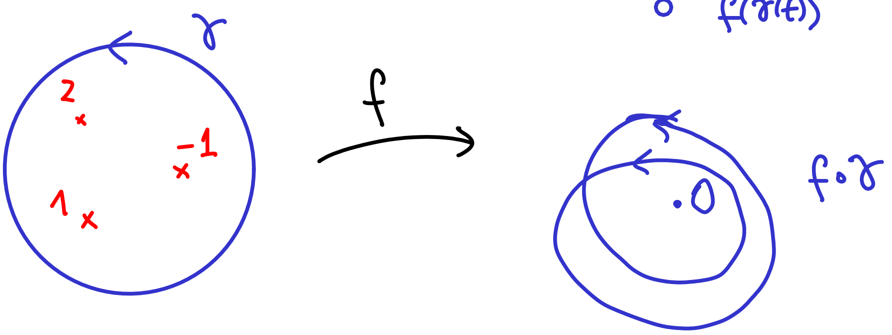
Niech Ω będzie obszarem, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Niech $Z(f)$ bedzie zbiorem zer, a $P(f)$ zbiorem biegunów f. Załóżmy, że Γ jest homologicznym zeru cyklem w Ω o nośniku rozłącznym z $Z(f) \cup P(f)$. Wtedy

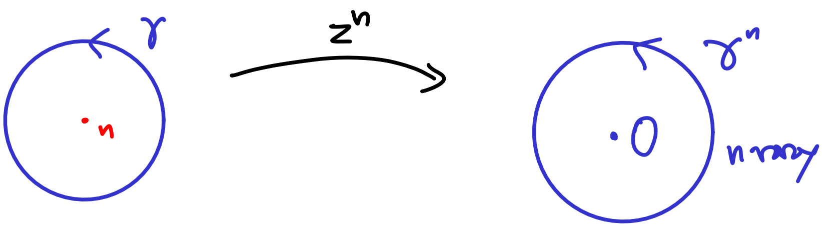
$$\sum_{s \in Z(f)\cup P(f)} \mathrm{ord}_s(f)\mathrm{Ind}_\Gamma(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\Gamma}(0).$$

W szczególności, jeśli zamknięta krzywa γ jest parametryzacją brzegu obszaru $U \subseteq \Omega$, to

$$\sum_{s \in U\cap(Z(f)\cup P(f))} \mathrm{ord}_s(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}dt$$





Dowód.

Stosujemy do f'/f tw. o residuach:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{s\in Z(f)\cup P(f)} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, s\right)\mathrm{Ind}_\Gamma(s)$$

Zauważmy, że

$$\frac{(ab)'}{ab} = \frac{a'b + ab'}{ab} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b}$$

Zatem jeśli

$$f(z) = (z-s)^n g(z), \quad g(s) \neq 0,\ n = \mathrm{ord}_s(f)$$

to

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{((z-s)^n)'}{(z-s)^n} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{z-s} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{}$$

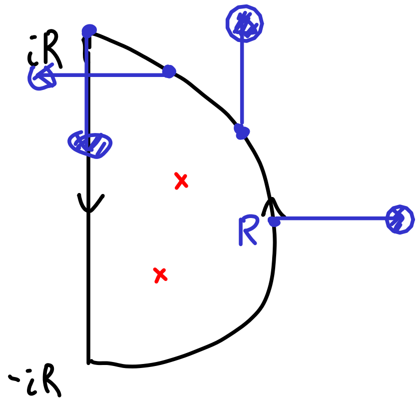
residuum n w s $(n = \mathrm{ord}_s f)$

holomorficzne w otoczeniu s

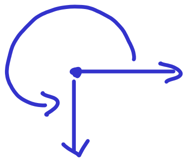
3) Ile pierwiastków wielomianu $P(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$ leży w prawej półpłaszczyźnie ($\mathrm{Re}(z) > 0$)?

Dla poniższej krzywej γ_R obliczymy $\mathrm{Ind}_{P\circ\gamma_R}(0)$, czyli liczbę pełnych obrotów wokół zera wykonywanych przez $P(z)$ gdy z obiega γ_R.

γ_R:

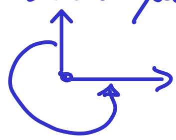


Narysujemy $\dfrac{P(z)}{|P(z)|}$ jako wektor w $z \in \gamma_R^*$



na górnym promieniu łuku

na dolnym:

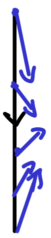


dla $|z| = R$, R duże

1) $\arg P(z) \approx \arg z^3$

$$\Delta \arg P(z) \approx \Delta \arg z^3 = 3\pi$$

2) dla $z = it$, $t \in [R, -R]$:



$$P(z) = P(it) = (it)^3 - (it)^2 + 3it + 5$$

$$= -it^3 + 3it + \underbrace{t^2 + 5}_{\mathrm{Re}\,P(z) > 0}$$

$$\Delta \arg P(z) \approx \Delta \arg z^3 = \pi$$

$$\Delta \arg P(z) \approx 3\pi + \pi = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$$

$\mathrm{Ind}_{P\circ\gamma_R}(0)$ – liczba pierwiastków $P(z)$ w prawej półpłaszczyźnie