Twierdzenie (Rouché)

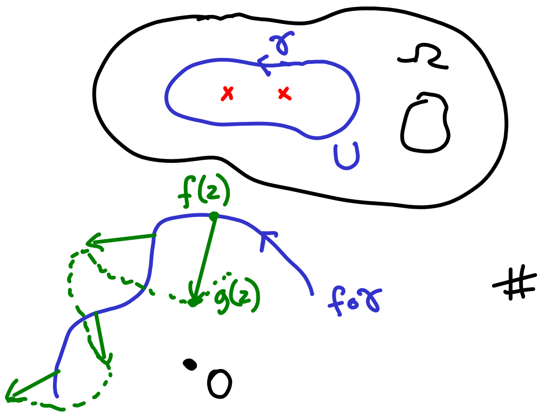
Niech zamknięta krzywa γ parametryzuje brzeg obszaru U, którego domknięcie zawarte jest w obszarze Ω. Załóżmy, że f, g są holomorficzne w Ω i spełniają warunek

$$\forall z \in \partial U \qquad |g(z)| < |f(z)|.$$

Wtedy f i $f+g$ mają tyle samo zer w U (liczymy z uwzględnieniem krotności).

Dowód:

$$\#\text{Zer } f \text{ w } U = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z}$$



$f\circ\gamma$ i $(f+g)\circ\gamma$ są homotopijne w $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (homotopia: $(f+tg)\circ\gamma$) $\longrightarrow$ $\|$

$$\#\text{Zer}(f+g) \text{ w } U = \mathrm{Ind}_{(f+g)\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(f+g)\circ\gamma}\frac{dz}{z}$$

$\square$

Przykłady.

1) (stary) $P(z) = \underbrace{z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0}_{g(z)}$ ma n zer w $B(0,R)$. dla $R > 1+\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|$

$$|g(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^k = \sum|a_k|R^k \leqslant \sum|a_k|R^{n-1} = \left(\sum|a_k|\right)R^{n-1} < R\cdot R^{n-1} = R^n = |f(z)|$$

dla $|z|=R$

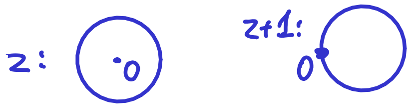
$P(z) = f(z) + g(z)$ ma w $B(0,R)$ tyle zer co z^n – czyli n.

2) $h(z) = z^{10} + 10ze^{z+1} - 9$. Ile zer ma h w $B(0,1)$?

$f(z) = 10ze^{z+1}$, $g(z) = z^{10} - 9$

dla $|z|=1$: $|f(z)| = 10|z||e^{z+1}| = 10\cdot 1\cdot e^{\mathrm{Re}(z+1)} \geqslant 10$

równość tylko dla $z=-1$



$|g(z)| \leqslant |z|^{10} + 9 = 10$; ale $|g(-1)| = |(-1)^{10} - 9| = |-8| = 8$

Dla wszystkich $z \in \partial B(0,1)$ zachodzi $|g(z)| < |f(z)|$

Rouché: h ma w $B(0,1)$ tyle zer co f, która ma w $B(0,1)$ jedno zero: $z=0$.

Wniosek (Hurwitz)

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem, zaś (f_n) ciągiem funkcji holomorficznych w Ω zbieżnym niemal jednostajnie do $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

a) Załóżmy, że żadna z funkcji f_n nie ma zer w Ω. Wtedy f nie ma zer w Ω lub $f \equiv 0$.

b) Załóżmy, że każda z funkcji f_n jest różnowartościowa. Wtedy f jest różnowartościowa lub stała.

Dowód.

a) Jeśli f nie jest funkcją zerową, ale $f(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \Omega$, to z_0 jest izolowanym zerem f. Na pewnym okręgu $\partial B(z_0, \epsilon)$ funkcja f nie zeruje się.

$$0 < \operatorname{ord}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = \lim_n 0 = 0$$

sprzeczność.

b) Załóżmy, że f nie jest stała, ale $f(z_1) = f(z_0)$ dla pewnych $z_0, z_1 \in \Omega$.

Niech $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$.

Funkcja g_n jest holomorficzna w $\Omega \setminus \{z_0\}$ i nie ma zer w tym zbiorze.

Ciąg (g_n) zbiega niemal jednostajnie do funkcji $g(z) = f(z) - f(z_0)$, która zeruje się w z_1 – wbrew (a).

Przykład:

- $f_n(z) = \frac{1}{n}$ $\quad f_n \to 0$, choć nie zeruje się.
- $f_n(z) = \frac{1}{n} e^z$ $\quad f_n \to 0$
- $f_n(z) = \frac{1}{n} z$ $\quad f_n$ różnowartościowe, $f_n \to 0$

Funkcje harmoniczne

Definicja.

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ będzie otwarty. Funkcję $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ nazywamy *harmoniczną,* jeśli jest klasy C^2 i spełnia

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Przykład 1. $x^2 - y^2$

$$\Delta(x^2-y^2) = \partial_x^2(x^2-y^2) + \partial_y^2(x^2-y^2) = 2-2=0$$

$$x^2 - y^2 = \mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right)$$

Jeśli $u = \mathrm{Re}(f)$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to u jest harmoniczna: $f = u+iv$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y \overset{(CR)}{=} (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Przykład 1, cd. $u = x^2 - y^2$. Jak szukać v, że $u+iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$?

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -u_y = 2y &&\Rightarrow v = 2xy + C_1(y) \\ v_y &= u_x = 2x &&\Rightarrow v = 2xy + C_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = 2xy + C$$

$$u = \mathrm{Re} f, \quad f(x+iy) = (x^2-y^2) + i\cdot(2xy+C) = (x+iy)^2 + iC$$

Przykład 2. $u(z) = \log|z|$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

$$(*) \qquad u(z) = \mathrm{Re}(\log z)$$

Funkcja $\log z$ nie jest dobrze określona na całym $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, ale da się ją zdefniować w otoczeniu każdego niezerowego z – i wtedy w tym otoczeniu spełniony jest wzór $(*)$. Stąd wynika, że u jest harmoniczna.

Twierdzenie.

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ bedzie obszarem jednospójnym, a $u \in C^2(\Omega)$ niech będzie harmoniczna. Wtedy istnieje $v \in C^2(\Omega)$ (jedyna z dokładnościa do stałej addytywnej), taka że $u + iv$ jest holomorficzna w Ω.

D-d: Niech $f = u_x - i u_y$. $f \in C^1$ i spełnia (CR):

$$(u_x)_x = (-u_y)_y \quad , \quad (u_x)_y = -(-u_y)_x$$

Zatem $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i ma pierwotną $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, $F = U + iV$

$$u_x - iu_y = f = F' = \partial_z F = \tfrac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(U+iV) = \tfrac{1}{2}\big((U_x + V_y) + i(-U_y + V_x)\big)$$

|| (CR) dla F

$U_x - iU_y$

Stąd: $u_x = U_x$, $u_y = U_y$

$$(u-U)_x = 0 = (u-U)_y \Rightarrow u - U = c$$

$$u + iV = -c + U + iV = -c + F \in \mathcal{O}(\Omega)$$

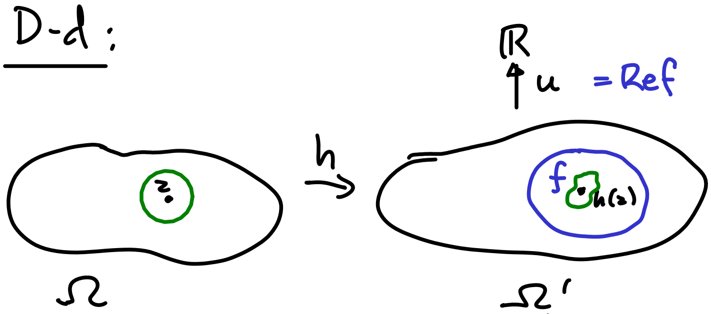
Jedyność: $u+iV,\ u+i\tilde{V} \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow V - \tilde{V} \in \mathcal{O}(\Omega)$, rzeczywista

$\Rightarrow V - \tilde{V}$ stała $\square$

Wniosek

Niech u będzie harmoniczna w Ω', zaś $h\colon \Omega \to \Omega'$ niech będzie holomorficzna. Wtedy $u \circ h$ jest harmoniczna w Ω.

D-d:



$$B(z,\delta) \xrightarrow{h} B(h(z),\epsilon)$$

Dobieramy: ϵ tak, by $B(h(z),\epsilon) \subseteq \Omega'$

δ tak, by $h[B(z,\delta)] \subseteq B(h(z),\epsilon)$

Istnieje $f \in \mathcal{O}(B(h(z),\epsilon))$, że $u = \operatorname{Re} f$

Wtedy, dla $w \in B(z,\delta)$

$$(u \circ h)(w) = u(h(w)) = \operatorname{Re} f(h(w)) =$$

$$= \operatorname{Re}(f \circ h)(w)$$

na $B(z,\delta)$: $u \circ h = \operatorname{Re}(\underline{f \circ h})$

↑

holomorficzna jako złożenie holomorficznych.

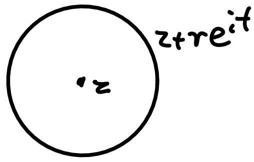
Własność średniej

Załóżmy, że u jest harmoniczna w Ω, $z \in \Omega$, $\overline{B}(z,r) \subseteq \Omega$. Dobierzmy $f \in \mathcal{O}(B(z, r+\epsilon))$ tak, by $u = \operatorname{Re} f$.

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}}\, rie^{it}\,dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z+re^{it})\,dt$$



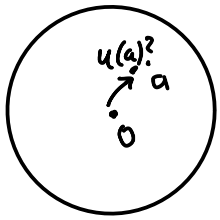
Wartość u w punkcie z jest średnią wartości u na okręgu o środku z. Mówimy, że funkcja harmoniczna u ma *własność średniej.*

Wzór Cauchy'ego odtwarza wartość funkcji holomorficznej w dowolnym punkcie koła z jej wartości na brzegu tego koła. Czy da się zrobić coś podobnego dla funkcji harmonicznych?

Zrobimy to tak:

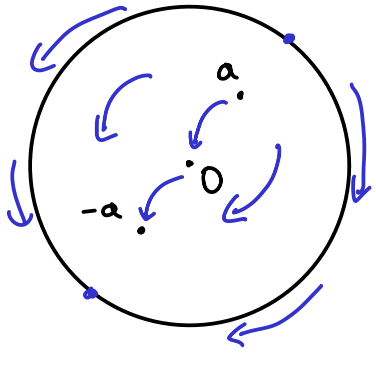
1) dla uproszczenia rachunków: u będzie harmoniczna na $B(0, 1+\epsilon)$, $a \in B(0,1)$;
2) zastosujemy własność średniej do $u \circ \varphi_{-a}$, gdzie

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$



(Wtedy $u(a) = u(\varphi_{-a}(0)) = (u \circ \varphi_{-a})(0)$.)

Lemat 1
Niech $a \in B(0,1)$.
Wtedy $\varphi_a \colon B(0,1) \to B(0,1)$ jest holomorficzną bijekcją, odwrotną do φ_{-a}.
Przekształcenie φ_a odwzorowuje też $\partial B(0,1)$ bijekcyjnie na $\partial B(0,1)$.



Dowód (lematu 1):

Jeśli $|z| = 1$, to $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \dfrac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|\cdot|\overline{z}|} = \dfrac{|z-a|}{|\overline{z}-\overline{a}|} = \underline{1}$

Zatem $\varphi_a\colon \partial B(0,1) \to \partial B(0,1)$. Na mocy zasady maksimum wnioskujemy stąd $\varphi_a\colon B(0,1) \to B(0,1)$.

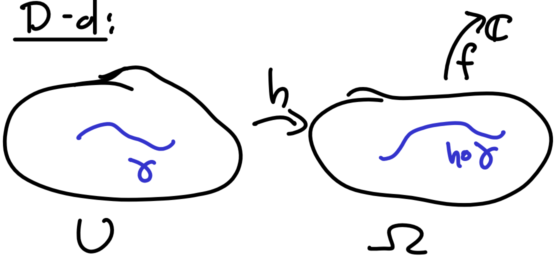
Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić można $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{Id}$.

$\square$

Lemat 3
Niech γ będzie krzywą w U, $h\colon U \to \Omega$ niech będzie holomorficzne, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wedy

$$\int_{h\circ\gamma} f(z)dz = \int_\gamma (f\circ h)(w)h'(w)dw$$

<u>D-d:</u>



$$\int_{h\circ\gamma} f(z)dz = \int_0^1 f(h(\gamma(t)))\,(h\circ\gamma)'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{f(h(\gamma(t)))h'(\gamma(t))}_{((f\circ h)\cdot h')(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_\gamma (f\circ h)(w)h'(w)\,dw$$

$\square$

Do rzeczy: u harmoniczna w $B(0,1+\epsilon)$, $u=\mathrm{Re}\, f$, $f\in\mathcal{O}(B(0,1+\epsilon))$. $a\in B(0,1)$

$$u(a)=u(\varphi_{-a}(0))=\mathrm{Re}\,(f\circ\varphi_{-a}(0))=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,1)}\frac{f(\varphi_{-a}(z))}{z}\,dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,1)}\frac{f(\varphi_{-a}(z))}{z}\,dz \underset{\substack{z=\varphi_a(w)\\ w=\varphi_{-a}(z)}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,1)}\frac{f(w)}{\varphi_a(w)}\varphi_a'(w)\,dw =$$

$$\varphi_a'(z)=\frac{d}{dz}\left(\frac{z-a}{1-\bar a z}\right)=\frac{1(1-\bar a z)-(z-a)(-\bar a)}{(1-\bar a z)^2}=\frac{1-|a|^2}{(1-\bar a z)^2}$$

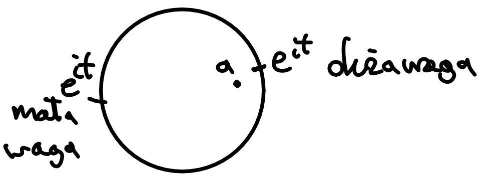
$$\frac{\varphi_a'(w)}{\varphi_a(w)}=\frac{1-|a|^2}{(1-\bar a w)^2}\cdot\frac{(1-\bar a w)}{w-a}=\frac{1-|a|^2}{(1-\bar a w)(w-a)}$$

$$\underset{w=e^{it}}{=}\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1-|a|^2}{(1-\bar a e^{it})(e^{it}-a)}\cdot \cancel{i}e^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})\frac{1-|a|^2}{(e^{-it}-\bar a)(e^{it}-a)}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})\frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}\,dt$$

$$u(a)=\mathrm{Re}(\downarrow)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\boxed{\frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}}\,dt$$

jądro Poissona: $P_a(e^{it})$ lub $P_a(t)$



Niech $a=re^{i\theta}$; wtedy

$$\frac{1-|a|^2}{|e^{it}-a|^2}=\frac{1-r^2}{(e^{it}-re^{i\theta})(e^{-it}-re^{-i\theta})}=\frac{1-r^2}{1-r\left(e^{i(\theta-t)}+e^{i(t-\theta)}\right)+r^2}=$$

$$=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}=:P_r(\theta-t)$$ jądro Poissona

Twierdzenie

Jeśli u jest harmoniczna w otoczeniu $\overline{B}(0,1)$, to dla $r<1$

$$(P) \qquad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})P_r(\theta - t)dt.$$

(Uwaga: naprawdę wystarczy założyć, że u jest ciągła na $\overline{B}(0,1)$ i harmoniczna w $B(0,1)$; to wyniknie np. z kolejnego twierdzenia.)

Problem Dirichleta

Niech $u\colon \partial B(0,1) \to \mathbf{R}$ będzie ciągła. Znaleźć ciągłe rozszerzenie $u\colon \overline{B}(0,1) \to \mathbf{R}$ harmoniczne w $B(0,1)$.

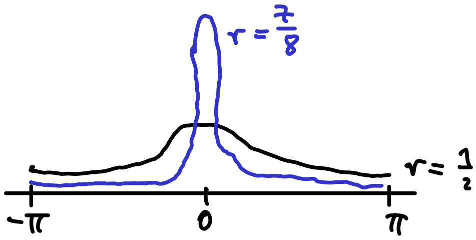
Twierdzenie

Problem Dirichleta ma jednoznaczne rozwiązanie – dane wzorem (P).

Lemat (własności jądra Poissona)

Funkcja $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$

a) jest określona dla $0 \le r < 1$, $t \in \mathbf{R}$;
b) jest 2π–okresowa względem t;
c) $\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 2\pi$;
d) na $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$: $P_r(t) \rightrightarrows 0$ przy $r \to 1$ (dla $\epsilon > 0$).



D-d: a, b – jasne

c): w (P) podstawiamy $u \equiv 1$

d): dla $\epsilon \le t \le 2\pi - \epsilon$: $\cos t \le \cos \epsilon$

$$1-2r\cos t + r^2 \ge 1 - 2r\cos\epsilon + r^2$$

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\epsilon + r^2} = P_r(\epsilon)$$

$$P_r(\epsilon) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\epsilon + r^2} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 0 \\ \xrightarrow[r\to 1]{} 2-2\cos\epsilon \end{array} \Bigg\} \xrightarrow[r \nearrow 1]{} 0$$

Lemat

Dla $|w|=1$ i $|z|<1$ zachodzi $\dfrac{1-|z|^2}{|w-z|^2} = \operatorname{Re}\dfrac{w+z}{w-z}$.

(ZAD)

Dowód (twierdzenia o rozwiązaniu problemu Dirichleta):

Najpierw sprawdzimy, że funkcja zadana na $B(0,1)$ wzorem (P) jest harmoniczna w $B(0,1)$.

$z = re^{i\theta}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\, \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\, dt \overset{(L)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) dt = \mathrm{Re}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\, \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt}_{\substack{\text{holomorficzna} \\ \text{– wniosek z tw. Morery}}}\Bigg)$$

Pozostaje sprawdzić ciągłość u na brzegu $B(0,1)$.

Niech $z_0 = e^{i\theta}$. Chcemy sprawdzić, że

$$\lim_{z \to z_0} u(z) = u(z_0)$$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, by

1) dla $|t-\theta| \le 2\delta$ zachodziło $|u(e^{i\theta}) - u(e^{it})| < \epsilon$;
2) dla $|t-\theta| \ge \delta$ i $r \ge 1-\delta$ zachodziło $P_r(\theta - t) < \epsilon$.

Wówczas, dla $z = re^{i\theta'}$, $r > 1-\delta$, $|\theta - \theta'| < \delta$: