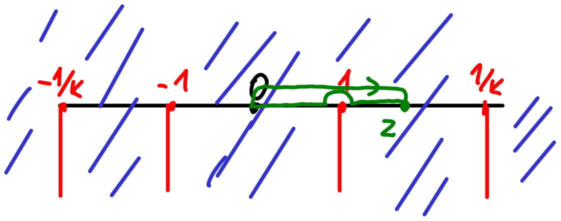
Przykład.

$$S(z) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \qquad 0 < k < 1$$

W $\mathbf{C} \setminus ((\pm 1 + i\mathbf{R}_{\leq 0}) \cup (\pm 1/k + i\mathbf{R}_{\leq 0}))$ każda z funkcji $1 \pm w$, $1 \pm kw$ ma analityczny pierwiastek. Dobieramy te pierwiastki tak, by w punktach przedziału $(-1, 1)$ były dodatnie.

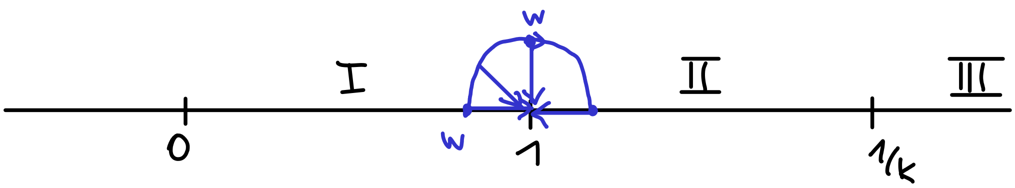
Funkcja S ma sens dla $z \in \overline{\mathbf{H}}$, jest ciągła na $\overline{\mathbf{H}}$ i holomorficzna w $\mathbf{H}$.



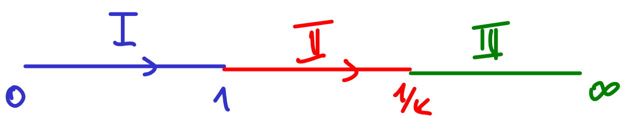
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

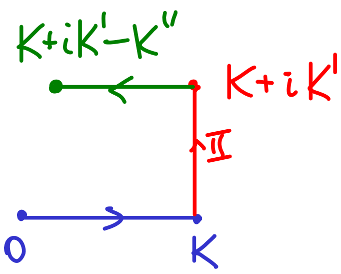
$$\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

$$S[\mathbb{R}] = ?$$



arg:	$\sqrt{1-w}$	$\sqrt{1+w}$	$\sqrt{1-kw}$	$\sqrt{1+kw}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$
I	0	0	0	0	0
II	$-\pi/2$	0	0	0	$\pi/2$
III	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	π





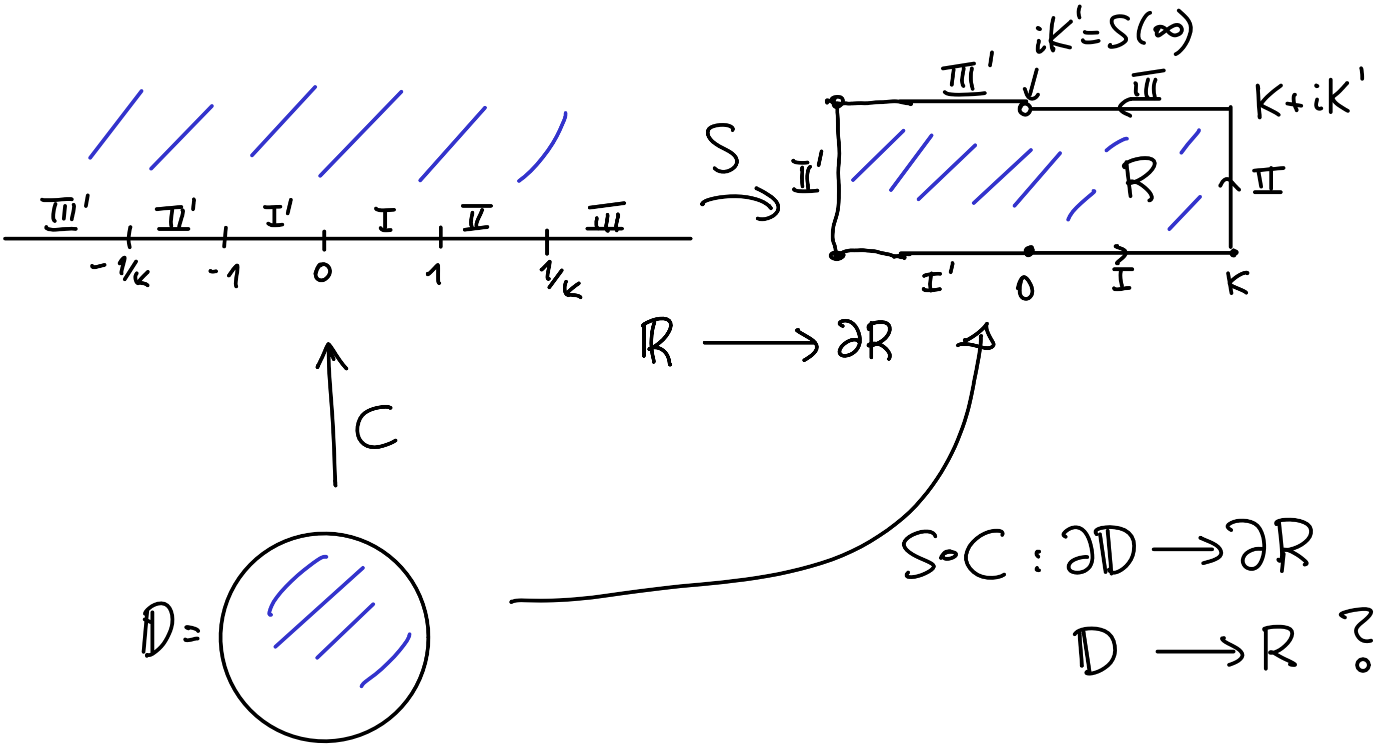
$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \qquad \text{bo w II}: \sqrt{1-x} = (-i)\sqrt{x-1}$$

$$K'' = \int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} \quad , \qquad \text{bo w } \overline{\text{III}}: \quad \begin{array}{l} \sqrt{1-x} = (-i)\sqrt{x-1} \\ \sqrt{1-kx} = (-i)\sqrt{kx-1} \end{array}$$

$$\Big\| \quad x = \frac{1}{ky}$$

$$\int_1^0 \frac{-\frac{1}{ky^2}\,dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2y^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\cancel{ky^2}\sqrt{\frac{1}{\cancel{k^2y^4}}(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = K$$

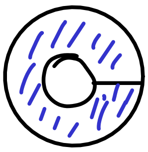


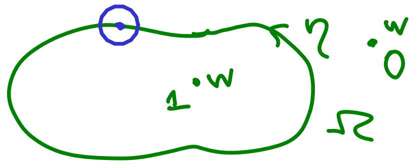
Niech $C\colon \overline{\mathbf{D}} \to \overline{\mathbf{H}}$ oznacza transformatę Cayleya. Złożenie $S \circ C$ jest ciągłe, holomorficzne w $\mathbf{D}$ i przekształca $\partial\mathbf{D}$ (bijekcyjnie) na ∂R. Pokażemy, że w tej sytuacji $S \circ C$ jest biholomorfizmem $\mathbf{D}$ na R.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f\colon \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}$ jest ciągłe, holomorficzne w $\mathbf{D}$, a funkcja $\eta\colon [0, 2\pi] \ni t \mapsto f(e^{it})$ jest bijekcyjną parametryzacją zamkniętej krzywej ograniczającej pewien obszar Ω (jedynie $\eta(0) = \eta(2\pi)$).

Załóżmy ponadto, że





(A) dla $w \notin \partial\Omega$*:* $\operatorname{Ind}_\eta(w) = \begin{cases} 1, & \textit{gdy } w \in \Omega \\ 0, & \textit{gdy } w \notin \Omega \end{cases}$;

(B) $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbf{C} \setminus \Omega}$.

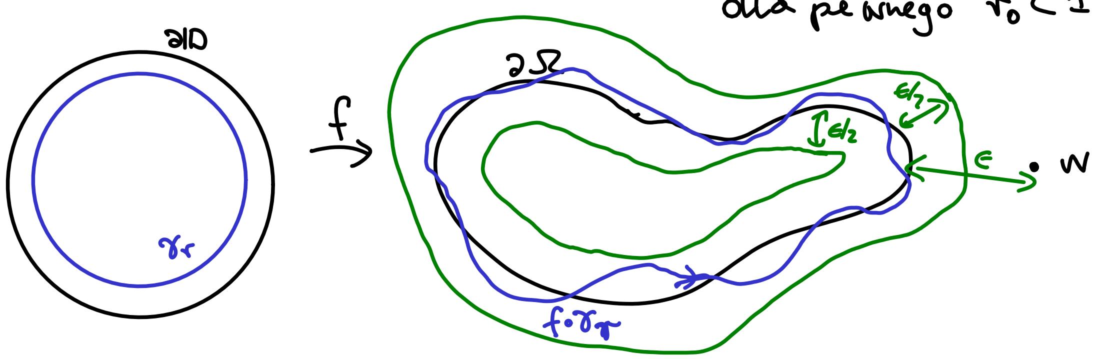
Wtedy f przekształca $\mathbf{D}$ biholomorficznie na Ω.

Uwaga: tak naprawdę (A) i (B) wynikają z poprzednich założeń.

Dowód. Niech $\gamma_r(t) = re^{it}$; wtedy $\eta = f \circ \gamma_1$. Wybierzmy $w \notin \partial\Omega$.

$\#\{z \in \mathbf{D} \mid f(z) = w\} = \#Z(f(\cdot) - w) = (*)$

nie ma zer poza $B(0, r_0)$ dla pewnego $r_0 < 1$



gdy $r \nearrow 1$: $\gamma_r \rightrightarrows \gamma_1$

$f \circ \gamma_r \rightrightarrows f \circ \gamma_1 = \eta$

dla $r \geq r_0$: $\forall t\ |f\circ\gamma_r(t) - f\circ\gamma_1(t)| < \varepsilon/2$, $f\circ\gamma_r(t) \neq w$

dla $r_0 \leq r \leq 1$: $H(r,t) = f(\gamma_r(t))$ jest homotopią krzywych $f\circ\gamma_r$ w $\mathbb{C} \setminus \{w\}$

$$(*) = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma_r - w}(0) = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma_r}(w) = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma_1}(w) = \operatorname{Ind}_\eta(w) = \begin{cases} 1, & w \in \Omega \\ 0, & w \notin \Omega \end{cases}$$

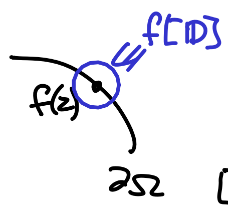
dla $r_0 \leq r < 1$

$f\circ\gamma_r \sim f\circ\gamma_1$ w $\mathbb{C}\setminus\{w\}$

Zatem $f\colon \mathbf{D} \to \overline{\Omega}$.

Dla $z \in \mathbf{D}$ nie może zajść $f(z) \in \partial\Omega$, bo z otwartości $f[\mathbf{D}]$ i warunku (B) wynikałoby, że $f[\Omega] \cap (\mathbf{C} \setminus \Omega) \neq \emptyset$.

Ostatecznie: $f\colon \mathbf{D} \to \Omega$ jest holomorficzną bijekcją.



$\square$

Rodziny normalne

Definicja

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji zespolonych określonych na pewnym zbiorze $X \subseteq \mathbf{C}$ *(lub, ogólniej: na pewnej przestrzeni metrycznej X).*

a) Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest *jednostajnie ograniczona,* jeśli

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad |f(x)| < M.$$

b) Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest *jednakowo ciągła,* jeśli

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Twierdzenie

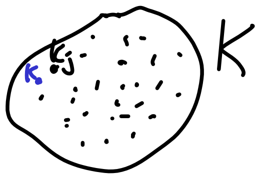
Niech $\mathcal{F}$ będzie jednostajnie ograniczoną i jednakowo ciągłą rodziną funkcji zespolonych określoną na zwartym $K \subseteq \mathbf{C}$ *(lub, ogólniej: na zwartej przestrzeni metrycznej K).* Wtedy z każdego ciągu elementów $\mathcal{F}$ można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny.

Dowód. Niech $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$.

1) Wybierzmy ciąg punktów $k_1, k_2, \ldots$ gęsty w K.
2) Metodą przekątniową wybierzmy podciąg ciągu (f_n) zbieżny w każdym k_j. Niech wybranym podciągiem będzie (g_n).
3) Pokażemy, że (g_n) jest jednostajnie Cauchy'ego na K.

Ustalmy $\epsilon > 0$. Dobierzmy:

– δ z jednakowej ciągłości;
– J na tyle duże, by $\{k_1, \ldots, k_J\}$ tworzył δ-sieć w K;
– N na tyle duże, by dla $n, m \geq N$ oraz $j \leq J$



$$|g_n(k_j) - g_m(k_j)| < \epsilon.$$

Wtedy, dla $n, m \geq N$, $k \in K$, $|k_j - k| < \delta$:

$$|g_n(k) - g_m(k)| \leq \underset{\overset{\wedge}{\epsilon}}{|g_n(k) - g_n(k_j)|} + \underset{\overset{\wedge}{\epsilon}}{|g_n(k_j) - g_m(k_j)|} + \underset{\overset{\wedge}{\epsilon}}{|g_m(k_j) - g_m(k)|}$$

$\square$

Definicja

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji określonych na pewnym zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$.

1) Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *niemal jednostajnie ograniczona,* jeśli jest jednostajnie ograniczona na każdym zbiorze zwartym $K \subseteq \Omega$.
2) Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *niemal jednakowo ciągła,* jeśli jest jednakowo ciągła na każdym zbiorze zwartym $K \subseteq \Omega$.
3) Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest *normalna,* jeśli każdy ciąg $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ ma podciąg niemal jednostajnie zbieżny.

Wniosek.

Niemal jednostajnie ograniczona i niemal jednakowo ciągła rodzina $\mathcal{F}$ funkcji zespolonych określona na otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ jest normalna.

Dowód. Przedstawiamy Ω w postaci wstępującej sumy zbiorów zwartych K_n. Stosujemy twierdzenie do każdego K_n i używamy metody przekątniowej.

Uwaga: zwykle jednakowa ciągłość jest konsekwencją jednostajnych szacowań pierwszych pochodnych. Dla funkcji holomorficznych wzór Cauchy'ego pozwala wywnioskować takie szacowania z jednostajnej ograniczoności.

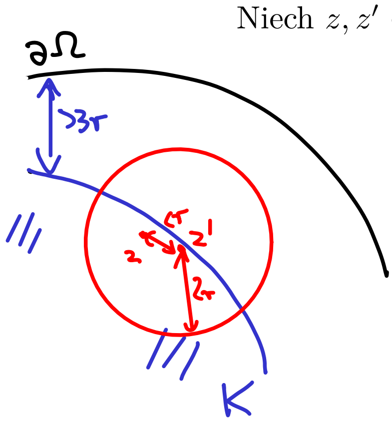
Lemat

Niech $\mathcal{F}$ będzie niemal jednostajnie ograniczoną rodziną funkcji holomorficznych na pewnym otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Wtedy $\mathcal{F}$ jest niemal jednakowo ciągła.

Dowód.

Weźmy dowolny zwarty $K \subseteq \Omega$. Niech $3r < d(K, \partial\Omega)$.

Niech $z, z' \in K$, $|z - z'| < r$, $f \in \mathcal{F}$.



$$|f(z)-f(z')| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z',2r)}\left(\frac{f(w)}{z-w}-\frac{f(w)}{z'-w}\right)dw\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial B(z',2r)} f(w)\left(\frac{1}{z-w}-\frac{1}{z'-w}\right)dw\right|$$

Dla $w \in \partial B(z',2r)$:

- $|f(w)| \leq M = \sup\{|f(\zeta)| \mid d(\zeta, K) \leq 2r\}$

- $\left|\frac{1}{z-w}-\frac{1}{z'-w}\right| = \frac{|z'-z|}{|z-w||z'-w|} \leq \frac{|z'-z|}{2r^2}$

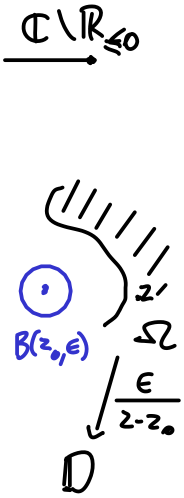
$$|f(z)-f(z')| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot 2r\cdot M\cdot\frac{|z-z'|}{2r^2} = \frac{M}{r}|z-z'|$$

stąd wynika jednakowa ciągłość: do ε dobieramy $\delta = \min\left(\frac{r}{M}\varepsilon, r\right)$ $\square$

Wniosek (tw. Montela)

Niemal jednostajnie ograniczona rodzina funkcji holomorficznych na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ jest normalna.

Twierdzenie (Riemanna o odwzorowaniu)
Otwarty jednospójny i właściwy podzbiór $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ jest biholomorficzny z $\mathbf{D}$.



Dowód.

Jednospójności użyjemy w postaci: niezerująca się funkcja na Ω na analityczny pierwiastek.

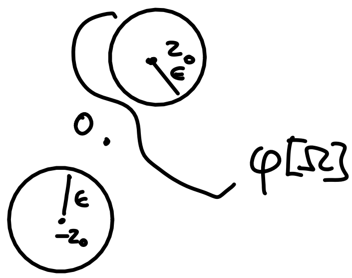
Wybierzmy $\omega \in \Omega$. Będziemy szukać różnowartościowych holomorficznych $f\colon \Omega \to \mathbf{D}$, $\omega \mapsto 0$, z możliwie dużym $|f'(\omega)|$.

I) Ω *można holomorficznie włożyć w* $\mathbf{D}$.

Niech $w \in \mathbf{C} \setminus \Omega$. Funkcja $\Omega \ni z \mapsto z - w \in \mathbf{C}$ ma analityczny pierwiastek φ w Ω:

$$\varphi(z)^2 = z - w.$$

φ jest 1-1; φ' nie zeruje się. $(2\varphi\varphi' = 1)$
$\varphi\colon \Omega \to \varphi[\Omega]$ jest biholomorfizmem.
Niech $z_0 \in \varphi[\Omega]$; $B(z_0, \epsilon) \subseteq \varphi[\Omega]$ dla pewnego $\epsilon \in (0, |z_0|)$.



Pokażemy, że $B(-z_0, \epsilon) \cap \varphi[\Omega] = \emptyset$.

gdyby $a \in B(-z_0,\epsilon)\cap\varphi[\Omega]$, $a = \varphi(b)$

$-a \in B(z_0,\epsilon) \subseteq \varphi[\Omega]$, $-a = \varphi(b')$

to

$$\begin{aligned} a^2 &= \varphi(b)^2 = b - w \\ \| \\ (-a)^2 &= \varphi(b')^2 = b' - w \end{aligned} \Rightarrow b = b' \Rightarrow \underset{\|}{\overset{a}{}}\varphi(b) = \overset{-a}{\underset{\|}{}}\varphi(b') \quad ↯.$$

$a \in \mathbb{D}$

$\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

II) *Rozważymy rodzinę* $\mathcal{F} = \{f\colon \Omega \to \mathbf{D} \mid f \text{ jest 1-1, holomorficzna, } f(\omega) = 0\}$.

Z I) wiemy, że $\mathcal{F}$ jest niepusta. Z samej swej definicji $\mathcal{F}$ jest jednostajnie ograniczona.

Lemat
$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(\omega)| < \infty.$$

Weźmy ciąg $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$, taki że $|f_n'(\omega)| \to \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(\omega)|$.

Z tw. Montela: ciąg (f_n) ma podciąg zbieżny niemal jednostajnie do pewnej f.

- f jest holomorficzna. $f_n' \to f'$ niemal jedn. $f_n'(\omega) \to f'(\omega)$
- f nie jest stała, bo $|f'(\omega)| > 0$
- f jest 1-1 z tw. Hurwitza; $f\colon \Omega \to \mathbf{D}$, bo $f[\Omega]$ jest otwarty.

$\longrightarrow |f'(\omega)| = \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(\omega)|$.

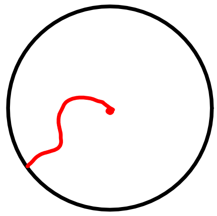
III) *Pokażemy, że* $f[\Omega] = \mathbf{D}$.

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

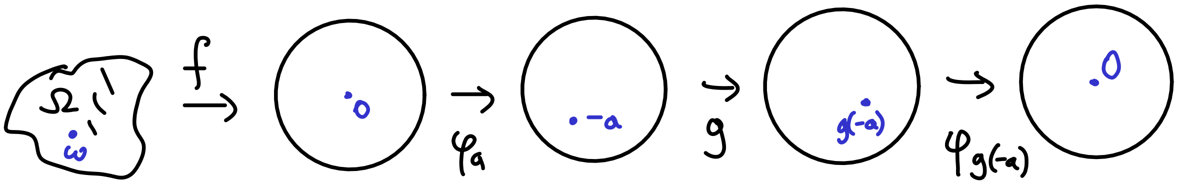
Załóżmy nie wprost, że $a \in \mathbf{D} \setminus f[\Omega]$.

$$\varphi_a \circ f \colon \Omega \to \mathbf{D} \setminus \{0\}$$

Zbiór $U = (\varphi_a \circ f)[\Omega]$ jest jednospójny i zawarty w $\mathbf{D} \setminus \{0\}$.
Funkcja z ma w U analityczny pierwiastek g:



$$g \colon U \to \mathbf{C}, \qquad (\forall z \in U)(g(z)^2 = z)$$



$$F = \varphi_{g(-a)} \circ g \circ \varphi_a \circ f \in \mathcal{F}$$

Lemat.

$$|F'(\omega)| > |f'(\omega)|$$

<u>D-d</u>: $f = \underbrace{\varphi_a^{-1} \circ q \circ \varphi_{g(-a)}^{-1}}_{\Phi} \circ F \quad , \quad q(z) = z^2$

$\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ 0 \mapsto 0$, nie jest 1-1 (bo q nie jest 1-1)

Schwarz: $|\Phi'(0)| < 1$

$$|f'(\omega)| = |\Phi'(0)|\,|F'(\omega)| < |F'(\omega)|, \ \lightning \text{ z def } f.$$

zatem $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$ jest na $\square$