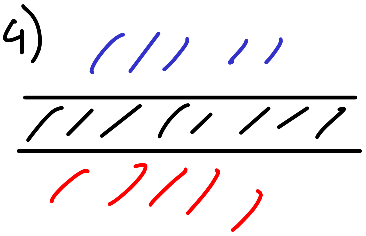
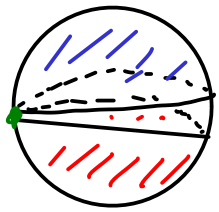
Twierdzenie

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem. Następujące warunki są równoważne:

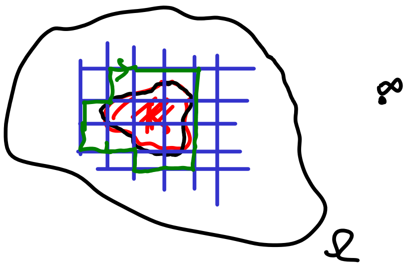
1) Ω jest homeomorficzny z $\mathbf{D}$;
2) Ω jest jednospójny;
3) $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 0$ dla każdej zamkniętej drogi γ w Ω i każdego $p \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \Omega$;
4) zbiór $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Omega$ jest spójny;
5) każda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ może być niemal jednostajnie aproksymowana wielomianami;
6) dla każdej $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i każdej zamkniętej drogi γ w Ω zachodzi $\int_\gamma f(z)dz = 0$;
7) każda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ma holomorficzną pierwotną;
8) każda niezerująca się $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ma analityczny logarytm;
9) każda niezerująca się $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ma analityczny pierwiastek kwadratowy.

4)



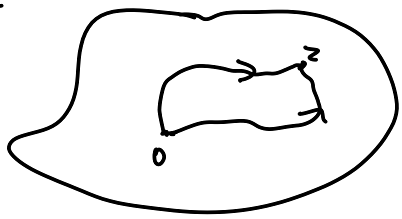


$3 \Rightarrow 4$

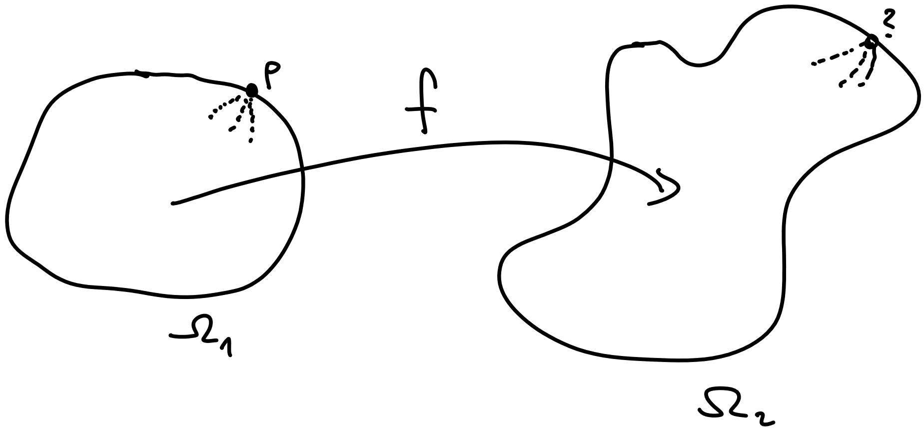


$\Omega \cup K$

$6 \Rightarrow 7$



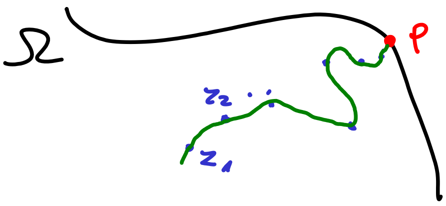
$F(z) = \int_0^z f(w)\,dw$



Biholomorfizmy na brzegu

Definicja

Niech $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ będzie obszarem. Punkt $p \in \partial\Omega$ jest brzegowym *punktem prostym,* jeśli dla każdego ciągu $(z_n) \subseteq \Omega$ zbieżnego do p istnieje ciągła krzywa $\gamma\colon [0,1] \to \overline{\Omega}$, taka że $\gamma\colon [0,1) \to \Omega$, $\gamma(1) = p$, oraz $\gamma(t_n) = z_n$ dla pewnego ciągu rosnącego (t_n) zbieżnego do 1.

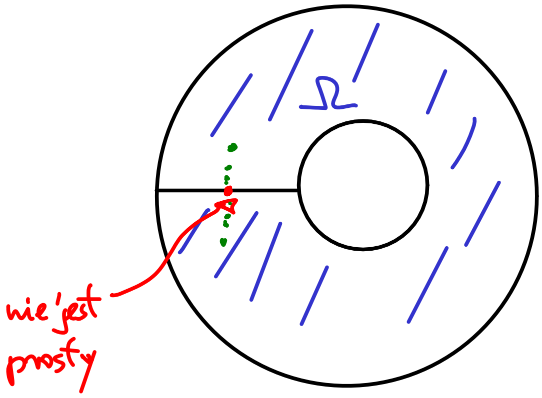


$z_i = \gamma(t_i)$

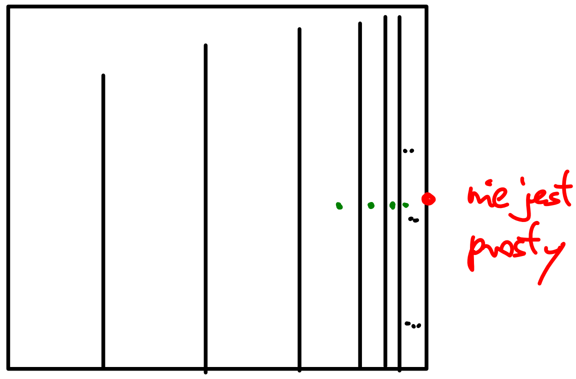
Przykłady.

1. Każdy punkt brzegowy zbioru wypukłego jest prosty.

2.



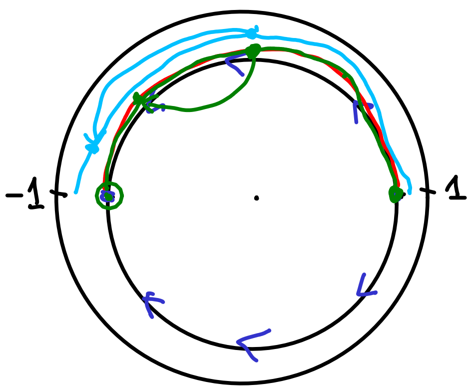
3.



Twierdzenie

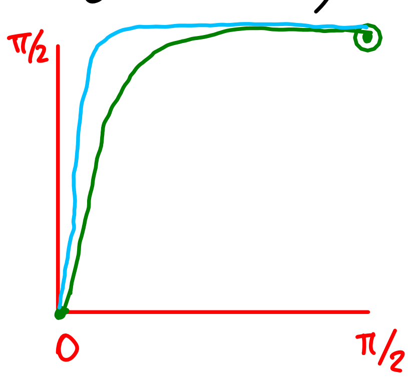
Załóżmy, że Ω_1 i Ω_2 są jednospójnymi ograniczonymi obszarami w $\mathbf{C}$, których wszystkie punkty brzegowe są proste. Wtedy biholomorfizm $\Omega_1 \to \Omega_2$ rozszerza się do homeomorfizmu $\overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$.

Przykład. Homeomorfizm $\mathbf{D}$ nie musi mieć ciągłego rozszerzenia do $\overline{\mathbf{D}}$.



$$f(re^{it}) = r\, e^{i\, \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{1-r}\,\mathrm{tg}\, t\right)}$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

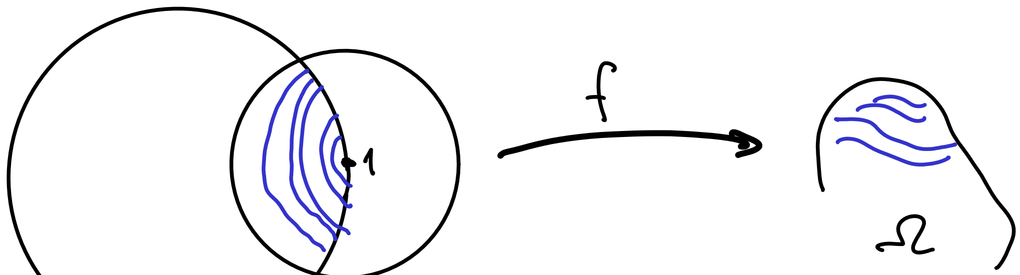


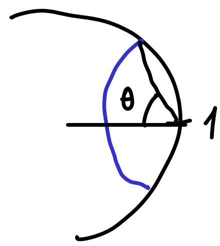
Dowód.

1) Bzo: $\Omega_1 = \mathbf{D}$ (a $\Omega_2 = \Omega$).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "f_2"] & \\ \Omega_1 \arrow[rr] & & \Omega_2 \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} & \overline{\mathbb{D}} \arrow[dl, "\overline{f_1}"'] \arrow[dr, "\overline{f_2}"] & \\ \overline{\Omega_1} \arrow[rr, bend left, "\overline{f_2} \circ \overline{f_1}^{-1}"] & & \overline{\Omega_2} \end{tikzcd}$$

2) Niech $f\colon \mathbf{D} \to \Omega$ będzie biholomorfizmem, $p \in \partial\mathbf{D}$. Chcemy pokazać, że f da się w ciągły sposób przedłużyć do p. Bzo: $p = 1$.





Niech $V = \mathbf{D} \cap B(1, \frac{1}{2})$. Dla $0 < r < \frac{1}{2}$ określamy

$$\gamma_r\colon (-\theta(r), \theta(r)) \to V, \quad \gamma_r(t) = 1 - re^{it}$$

Odwzorowanie

$$\{(r,t) \mid 0 < r < \frac{1}{2}, |t| < \theta(r)\} \ni (r,t) \to \gamma_r(t) \in V$$

jest (biegunową) parametryzacją V.

$\infty >$ Pole $f[V] =$

$$= \iint_V \underbrace{|f'(x+iy)|^2}_{\text{Jakobian } f \text{ traktowanego jako przekształcenie } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} dx\,dy = \int_0^{1/2} \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |f'(\gamma_r(t))|^2 \, r \, dt\, dr$$

$$\gamma_r(t) = 1 - re^{it}$$
$$\gamma_r'(t) = -rie^{it}$$

$\ell_r :=$ długość $f \circ \gamma_r = \displaystyle\int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} \left|(f\circ\gamma_r)'(t)\right| dt = \int \left|f'(\gamma_r(t))\right| \left|\gamma_r'(t)\right| dt =$

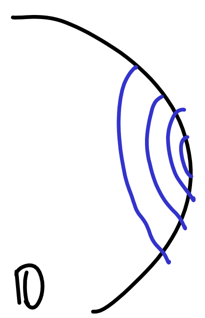
$$= \int |f'(\gamma_r(t))|\, r\, dt \leqslant \left(\int |f'(\gamma_r(t))|^2 r\, dt\right)^{1/2} \Big(\underbrace{\int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} r\, dt}_{\leqslant\, \pi r}\Big)^{1/2}$$

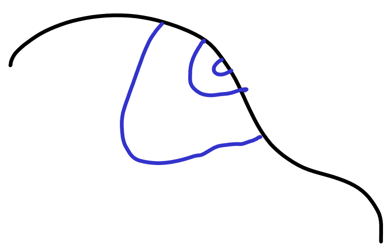
$$\underbrace{(|f'|\sqrt{r})\cdot(\sqrt{r})}_{\shortparallel}$$

$$\leqslant \left(\int |f'(\gamma_r(t))|^2 r\, dt\right)^{1/2} \cdot \sqrt{\pi r}$$

Stąd:
$$\frac{\ell_r^2}{\pi r} \leqslant \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |f'(\gamma_r(t))|^2 r\, dt \qquad \Big/ \int_0^{1/2} dr$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1/2} \frac{\ell_r^2}{r}\, dr \leqslant \int_0^{1/2} \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |f'(\gamma_r(t))|^2 r\, dt\, dr = \text{Pole } f[V] < \infty$$



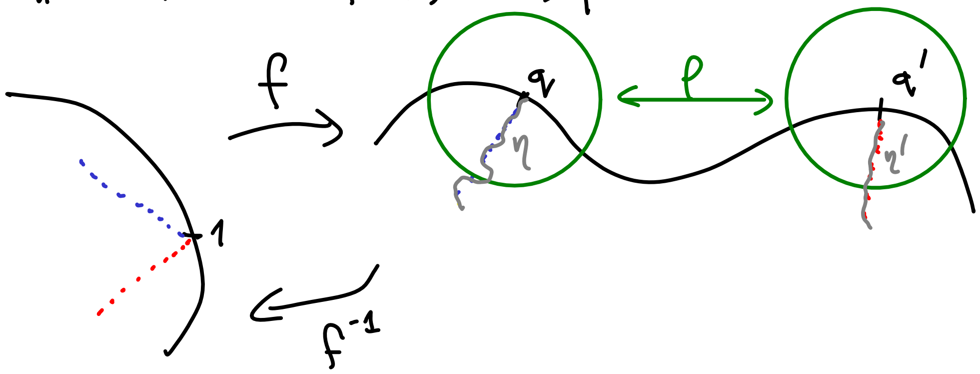


Konkluzja: istnieje ciąg (r_n) zbieżny do 0, taki że $\ell_{r_n} \to 0$.

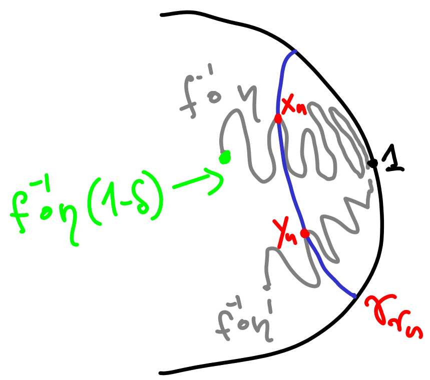
3) f przedłuża się w ciągły sposób do $p = 1$:
Jeśli nie, to istnieją ciągi

$$z_n \longrightarrow 1 \qquad f(z_n) \longrightarrow q \in \partial\Omega \qquad \rho = \frac{1}{3} d(q,q')$$

$$z_n' \longrightarrow 1 \qquad f(z_n') \longrightarrow q' \in \partial\Omega, \quad q \neq q'$$



Niech η, η' będą krzywymi w Ω przechodzącymi przez $f(z_n)$, $f(z_n')$ (jak w definicji prostoty dla q, q'). Wtedy $f^{-1} \circ \eta$, $f^{-1} \circ \eta'$ (obcięte do $[0,1)$) to krzywe w $\mathbf{D}$ dla których 1 jest punktem skupienia.



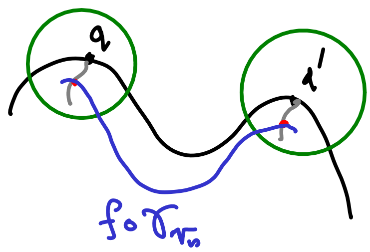
$\exists \delta > 0$

Dla $t, t' > 1-\delta$

$\eta(t) \in B(q, \rho)$

$\eta'(t') \in B(q', \rho)$

$d(\eta(t), \eta'(t')) \geq \rho$



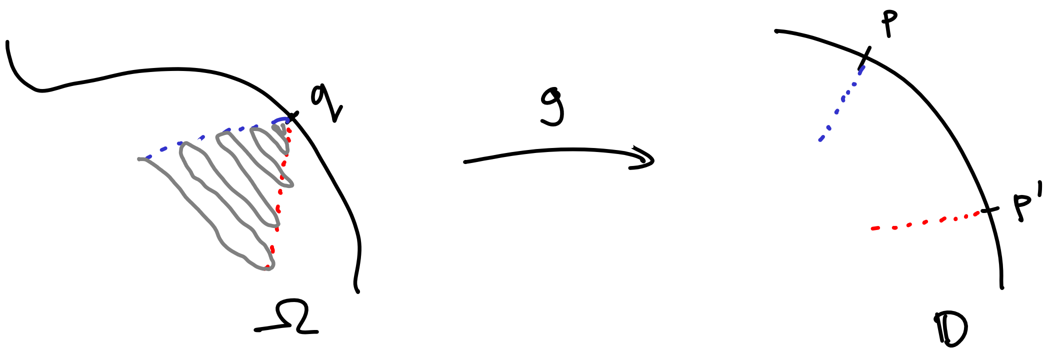
Dla pewnego $\epsilon > 0$ zachodzi warunek:
jeśli $0 < r < \epsilon$, to na krzywej γ_r są punkty z $f^{-1} \circ \eta|_{[1-\delta,1)}$ i z $f^{-1} \circ \eta'|_{[1-\delta,1)}$.
Weźmy $r = r_n$ dla dużych n:

$$\rho \leq d(f(x_n), f(y_n)) \leq \ell(f \circ \gamma_{r_n}) = \ell_{r_n} \longrightarrow 0 \qquad \lightning$$

4) Przedłużenie jak w 3) można wykonać w każdym $p \in \partial\mathbf{D}$.
Łącznie te przedłużenia definiują $\overline{f}\colon \overline{\mathbf{D}} \to \overline{\Omega}$.
Uzasadnimy, że $\overline{f}$ jest ciągłe.

$$\exists \delta>0 \quad f[\mathbb{D}\cap B(p,\delta)] \subseteq B(\bar{f}(p),\epsilon)$$
$$\bar{f}[\overline{\mathbb{D}}\cap B(p,\delta)] \subseteq \overline{B}(\bar{f}(p),\epsilon) \subseteq B(\bar{f}(p),2\epsilon)$$

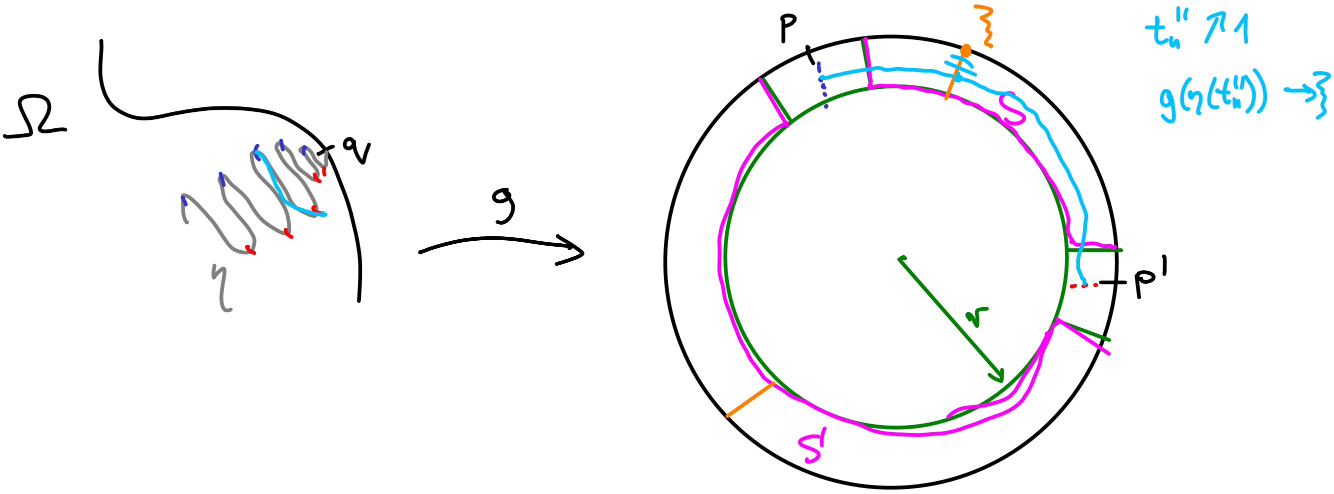
5) Niech $g\colon \Omega \to \mathbf{D}$ będzie odwrotne do f, niech $q \in \partial\Omega$.
Pokażemy, że g można rozszerzyć w sposób ciągły do q.
Jeśli nie, to:



istnieją

$$\begin{array}{ll} z_n \to q & g(z_n) \to p \in \partial\mathbb{D} \\ & \qquad\quad \neq \\ z_n' \to q & g(z_n') \to p' \in \partial\mathbb{D} \end{array}$$

Przez ciąg $z_1, z_1', z_2, z_2', \ldots$ prowadzimy krzywą η jak w definicji prostoty dla q;
niech $\eta(t_n) = z_n$, $\eta(t_n') = z_n'$.

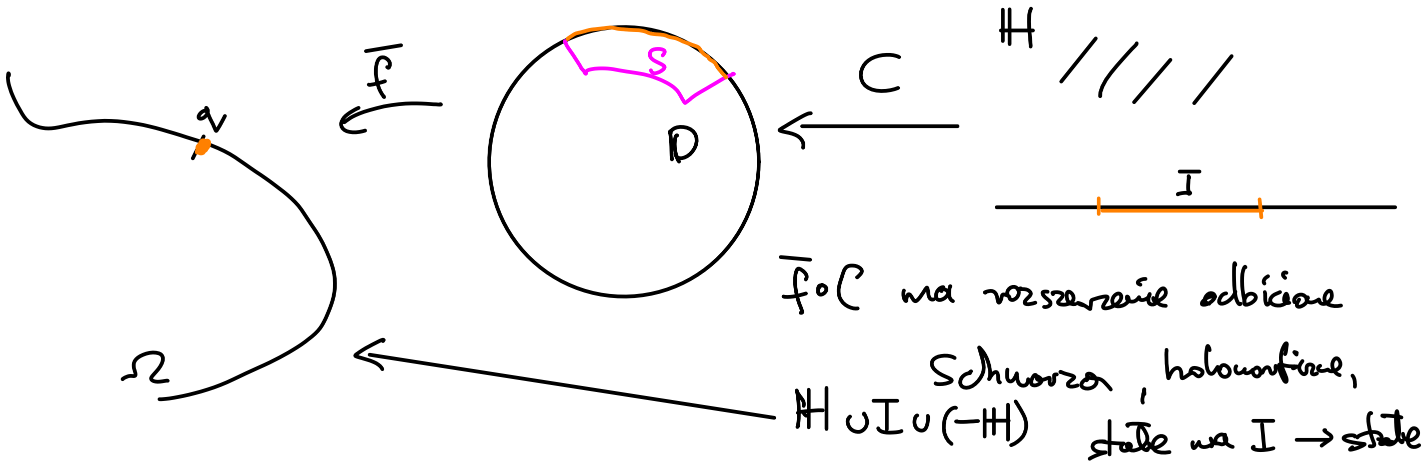


Dla nieskończenie wielu n krzywa $g \circ \eta|_{[t_n, t_n']}$ przecina każdy promień przechodzący przez S (lub: każdy promień przechodzący przez S'). Bso: S jest OK.

Dla każdego $\xi \in \partial \mathbf{D} \cap S$ istnieje ciąg t_n'' zbieżny do 1, taki że $(g \circ \eta)(t_n'') \to \xi$. Wynika stąd, że

$$\overline{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(g(\eta(t_n''))) = \lim_{n\to\infty} \eta(t_n'') = q.$$

Ale jeśli $\overline{f} \equiv q$ na $\partial \mathbf{D} \cap S$, to $f \equiv q$ na $\mathbf{D}$:



6) $\overline{g}\colon \overline{\Omega} \to \overline{\mathbf{D}}$ jest ciągłe (jak w 4)).
7) $\overline{f} \circ \overline{g}$ jest ciągłym rozszerzeniem $f \circ g = \mathrm{Id}_\Omega$, więc jest identycznością.
Podobnie $\overline{g} \circ \overline{f}$ jest identycznością.
Zatem $\overline{f}$, $\overline{g}$ są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami.

$\square$ (tw)