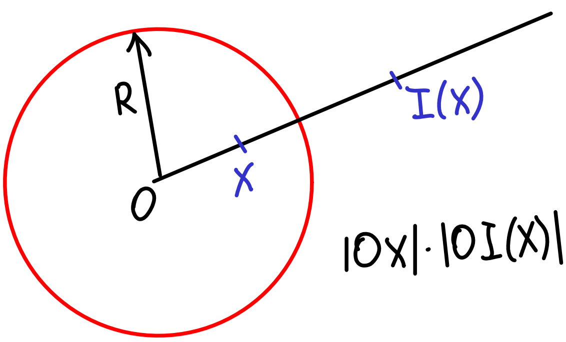
Inwersja

Inwersja I względem okręgu C:



$$|OX| \cdot |OI(X)| = R^2$$

Wzorem

dla $C = \partial B(0,1)$: $\quad I(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

$C = \partial B(0,R)$ $\quad I(z) = \dfrac{R^2}{\bar{z}}$

Inwersja zachowuje kąty.

Lemat

Jeśli krzywa C jest okręgiem lub prostą, zaś f jest homografią lub inwersją, to $f[C]$ jest okręgiem lub prostą.

Dowód.

Każda homografia jest złożeniem przekształceń o wzorach $z + a$, bz, $\frac{1}{z}$.

Inwersja tak samo, z dodatkiem $\overline{z}$.

Teza jest jasna dla nich wszystkich z wyjątkiem $\frac{1}{z}$.

$$|z-a|^2 = R^2$$

$$\left|\frac{1}{z} - a\right|^2 = R^2$$

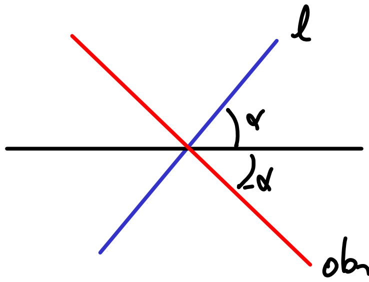
$$|1 - az|^2 = R^2 |z|^2$$

$$1 - 2\,\mathrm{Re}(az) + |a|^2|z|^2 = R^2|z|^2$$

$$(|a|^2 - R^2)\underbrace{|z|^2}_{x^2+y^2} - \underbrace{2\,\mathrm{Re}(az)}_{bx+cy} + 1 = 0$$

$\to$ okrąg, o ile $|a|^2 - R^2 \neq 0$

$\to$ prosta, o ile $|a|^2 - R^2 = 0$
nie przez 0



proste przez 0

obraz l przez $z \mapsto \frac{1}{z}$

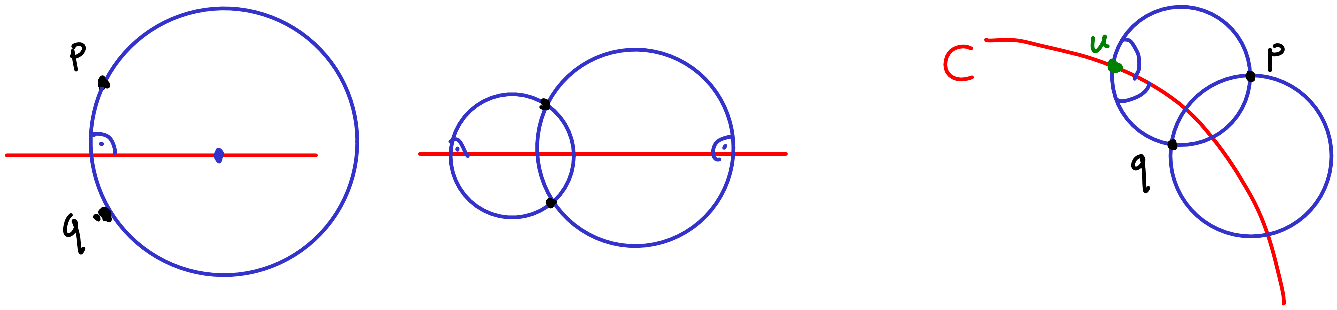
Lemat

Załóżmy, że p, q są symetryczne względem okręgu C (tzn. $I_C(p) = q$) lub względem prostej ℓ (tzn. $S_\ell(p) = q$). Niech f będzie homografią lub inwersją.

Wtedy punkty $f(p)$, $f(q)$ są symetryczne względem $f[C]$.

Dowód.

$$\begin{array}{rcl} p,\ q \text{ symetryczne względem } C & \iff & \text{każdy / więcej niż jeden okrąg przez } p,\ q \\ & & \text{jest prostopadły do } C \\ & & \Updownarrow \\ f(p),\ f(q) \text{ symetryczne względem } f[C] & \iff & \text{każdy / więcej niż jeden okrąg przez} \\ & & f(p),\ f(q) \text{ jest prostopadły do } f[C] \end{array}$$

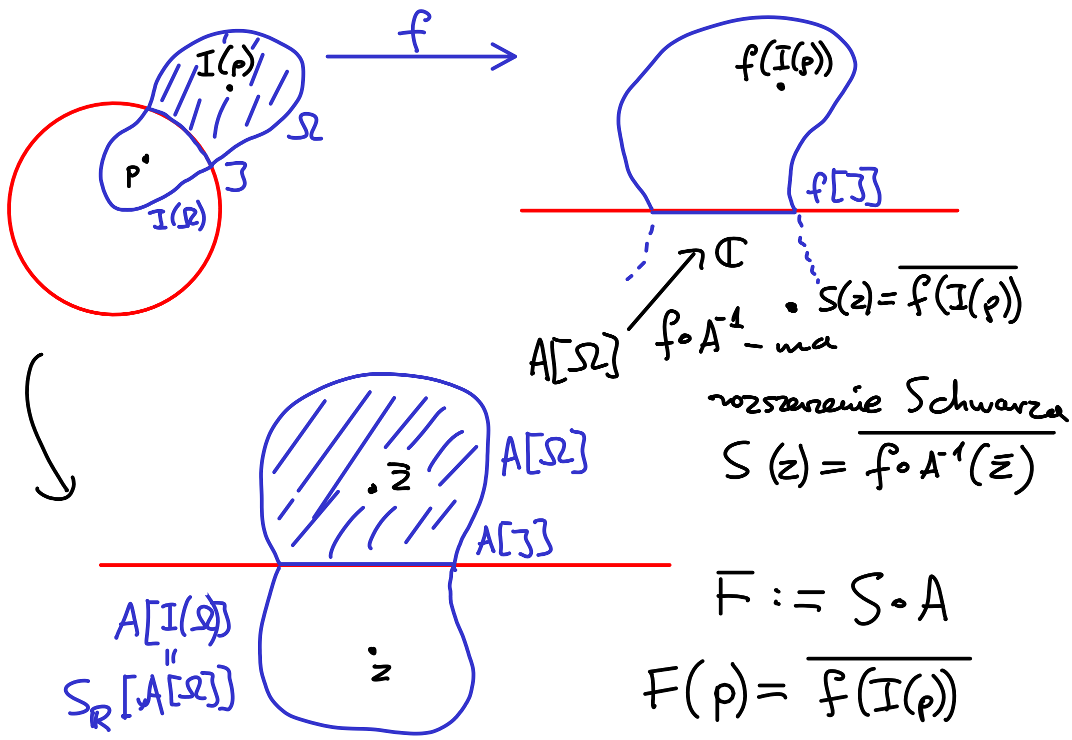


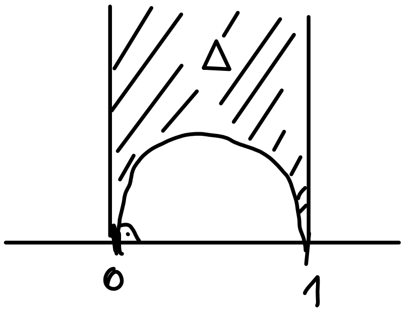
Lemat (odbicie Schwarza)

Niech C będzie okręgiem, I inwersją względem C, $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ obszarem rozłącznym z C, J otwartym łukiem C zawartym w $\overline{\Omega}$. Jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ przedłuża się w ciągły sposób do J, i jeśli to przedłużenie posyła J w $\mathbf{R}$, to f rozszerza sie do $F \in \mathcal{O}(\Omega \cup J \cup I(\Omega))$ danej dla $z \in I(\Omega)$ wzorem

$$F(z) = \overline{f(I(z))}$$

Dowód.





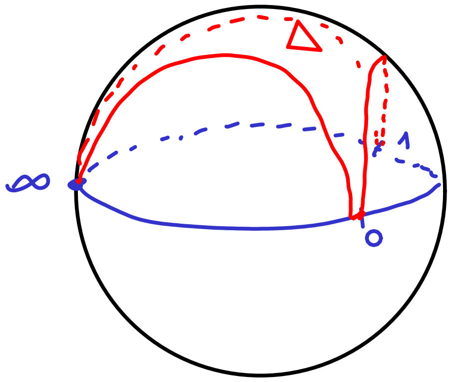
Funkcja modularna

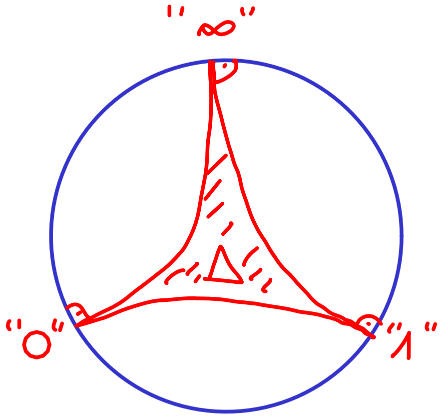
Niech

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in (0,1), |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Fakt

Istnieje biholomorfizm $f\colon \mathbf{H} \to \Delta$, taki że $\overline{f}(0) = 0$, $\overline{f}(1) = 1$, $\overline{f}(\infty) = \infty$.





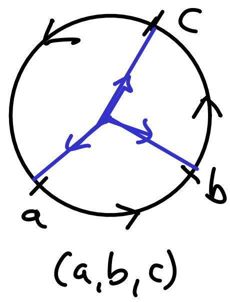
po przekształceniu przez homografię
wymieniającą $-i$ do ∞

Dowód. Istnieje biholomorfizm $f\colon \mathbf{H} \to \Delta$, taki że $\overline{f}(a) = 0$, $\overline{f}(b) = 1$, $\overline{f}(c) = \infty$ – dla pewnych $a, b, c \in \partial\mathbf{H} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbf{R}}$.

Lemat

Dla dowolnych $a, b, c \in \overline{\mathbf{R}}$, takich że porządek cykliczny (a, b, c) w $\overline{\mathbf{R}}$ jest taki sam jak porządek cykliczny $(0, 1, \infty)$, istnieje $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{H})$ takie że

$$\varphi\colon \quad 0 \mapsto a, \quad 1 \mapsto b, \quad \infty \mapsto c.$$



Budujemy φ^{-1}:

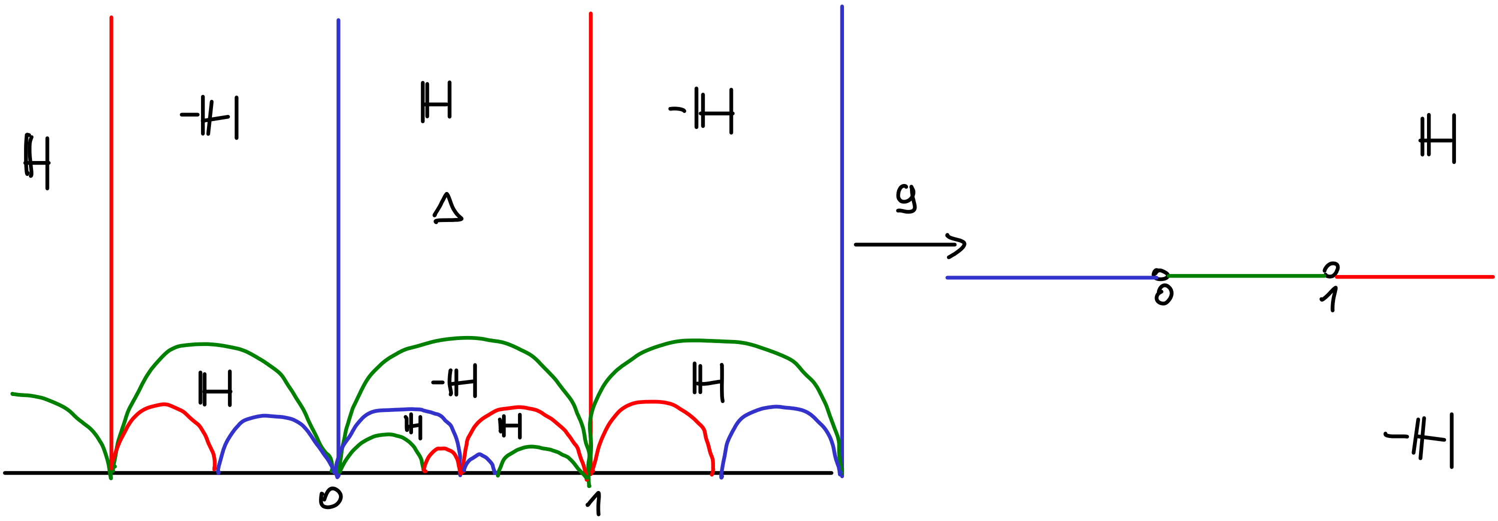
$$\begin{array}{ccccccc} a & \longmapsto & a' & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \\ b & \longmapsto & b' & \longmapsto & b'' & \longmapsto & 1 \\ c & \longmapsto & \infty & \longmapsto & \infty & \longmapsto & \infty \\ & \frac{1}{c-z} & & z-a' & & \frac{1}{b''}z & \leftarrow b''>0 \end{array}$$

$\square$ (L)

$f \rightsquigarrow f \circ \varphi$

$\square$ (F)

Niech $g\colon \Delta \to \mathbf{H}$ będzie odwrotne do f.
Rozszerzamy przez odbicie Schwarza:



Iterując dostajemy:

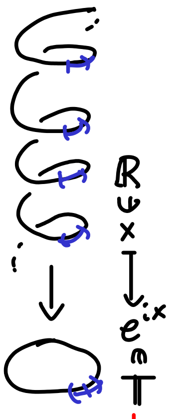
- parkietaż $\mathbf{H}$ "trójkątami";
- funkcję holomorficzną $\lambda\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$, przekształcającą wnętrza "trójkątów" biholomorficznie na $\mathbf{H}$ lub $-\mathbf{H}$, a wnętrza ich krawędzi na przedziały $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$.

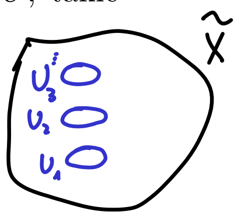
$\lambda\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ jest holomorficznym *nakryciem.*

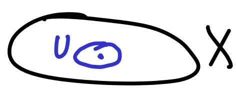
Definicja

Niech $\widetilde{X}, X$ będą podzbiorami $\mathbf{C}$ (lub: przestrzeniami topologicznymi). Ciągłe odwzorowanie $p\colon \widetilde{X} \to X$ jest *nakryciem,* jeśli każdy $x \in X$ ma otwarte otoczenie U, takie że

$$p^{-1}[U] = \bigcup_{i\in I}^{\bullet} U_i, \qquad (\forall i \in I)(p\colon U_i \to U \text{jest homoeomorfizmem}).$$

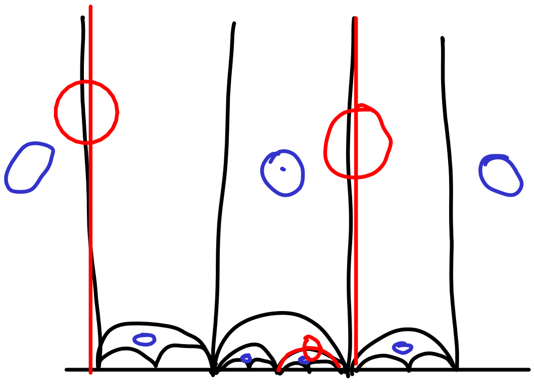


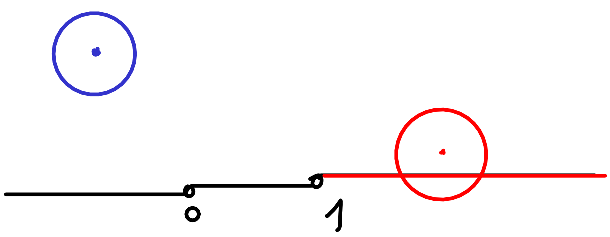




(Takie otoczenie U nazywamy *prawidłowo nakrytym.*)

Dla λ każde koło $B(z,r) \subseteq \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ jest prawidłowo nakryte.





Twierdzenie (o podnoszeniu odwzorowań; teoria nakryć / tw. o monodromii)

Jeśli $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$ jest holomorficzna, to istnieje holomorficzne $\widetilde{f}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{H}$, takie że $\lambda \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H} \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \end{tikzcd}$$

Twierdzenie (małe Picarda)

Niestała funkcja całkowita przyjmuje wszystkie wartości zespolone z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Dowód. Jeśli f nie przyjmuje wartości a, b, to $h \circ f$ nie przyjmuje $0, 1$ – dla homografii $h\colon a \mapsto 0$, $b \mapsto 1$, $\infty \mapsto \infty$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H} \arrow[d, "\lambda"] \arrow[r, "A", "\text{A.Cayley}"'] & \mathbb{D} \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "h \circ f"] & \mathbb{C} \setminus \{0,1\} & \end{tikzcd}$$

$A \circ \widetilde{f} = \text{const}$ (Liouville)

$\Downarrow$

$\widetilde{f} = \text{const}$

$\Downarrow$

$\lambda \circ \widetilde{f} = \text{const}$

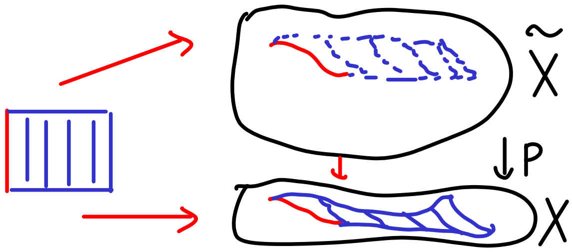
$h \circ f \overset{\Downarrow}{=} \text{const}$

$f \overset{\Downarrow}{=} \text{const}$

$\square$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$

Podnoszenie



Lemat (o podnoszeniu homotopii)

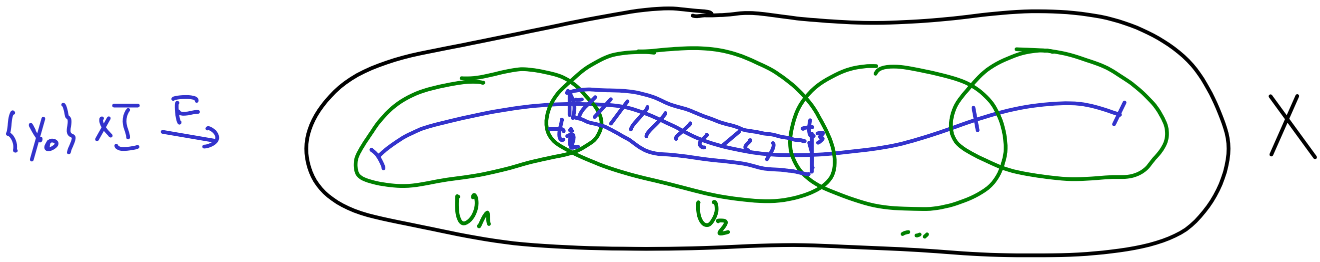
Niech $p\colon \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, $F\colon Y \times [0,1] \to X$ ciągłym odwzorowaniem, $\widetilde{F}\colon Y \times \{0\} \to \widetilde{X}$ częściowym podniesieniem F (tzn. $p(\widetilde{F}(y,0)) = F(y,0)$ dla $y \in Y$).

Istnieje rozszerzenie $\widetilde{F}$ do ciągłego $\widetilde{F}\colon Y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ bedacego podniesieniem F.

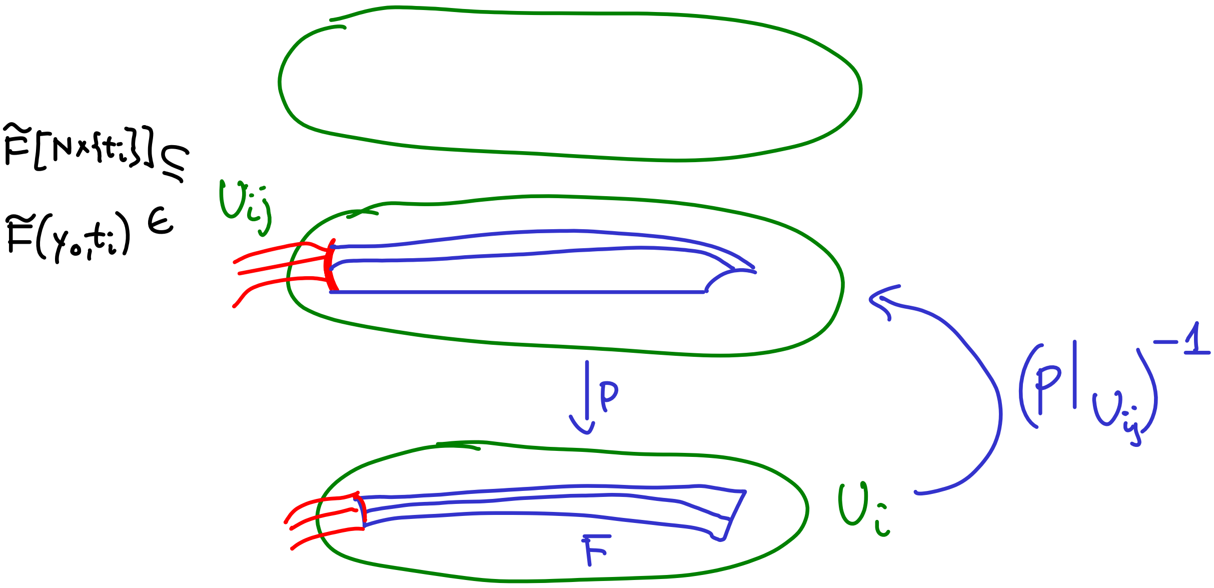
(W tym lemacie Y jest dowolną przestrzenią topologiczną; my użyjemy tylko punktu i domkniętego przedziału.)

Dowód. Konwencje: $I := [0,1]$; wszystkie odwzorowania są ciągłe.

1) Każdy $y_0 \in Y$ ma w Y otoczenie N, takie że istnieje $\widetilde{F}\colon N \times I \to \widetilde{X}$ – podniesienie F nad $N \times I$ rozszerzające $\widetilde{F}$ z $N \times \{0\}$.
   - $\forall t \in I$ istnieje prawidłowo nakryty otwarty $U_t \subseteq X$, taki że $F(y_0, t) \in U_t$.
   - Zwartość I: istnieją $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, $U_i \subseteq X$ prawidłowo nakryte, takie że $F[\{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}]] \subseteq U_i$.
   - Istnieją otwarte N_i – otoczenia y_0 w Y – takie że $F[N_i \times [t_i, t_{i+1}]] \subseteq U_i$.
   - Dla $N = \bigcap N_i$: $(\forall i)(F[N \times [t_i, t_{i+1}]] \subseteq U_i)$.



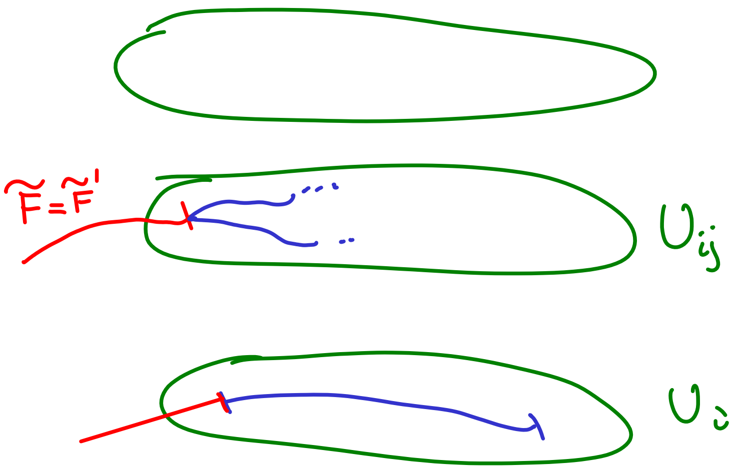
   - Budujemy $\widetilde{F}$ na $N \times [0, t_i]$ przez indukcję względem i (zmniejszając N).
   - Krok indukcyjny. Wiemy, że $F(y_0, t_i) \in U_i$, $p^{-1}[U_i] = \bigcup U_{ij}$ – stąd $\widetilde{F}(y_0, t_i) \in U_{ij}$ dla pewnego j. Zmniejszmy N tak, by mieć $\widetilde{F}[N \times \{t_i\}] \subseteq U_{ij}$, i zdefiniujmy $\widetilde{F}$ na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ jako $(p|_{U_{ij}})^{-1} \circ F$.



2) Jedyność gdy Y jest punktem. (Konwencja: będziemy pisać I zamiast $Y \times I$.)

- Niech $\widetilde{F}, \widetilde{F}' \colon I \to \widetilde{X}$ będą dwoma podniesieniami $F \colon I \to X$, $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0)$.
- Jak poprzednio: niech $F[t_i, t_{i+1}] \subseteq U_i$, U_i prawidłowo nakryte, $p^{-1}[U_i] = \bigcup U_{ij}$.
- Przez indukcję względem i pokażemy, że $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[0, t_i]$.
- Zbiory $\widetilde{F}[t_i, t_{i+1}]$, $\widetilde{F}'[t_i, t_{i+1}]$ są spójnymi podzbiorami $p^{-1}[U_i] = \bigcup U_{ij}$, więc każdy jest zawarty w pewnym U_{ij} – tym samym U_{ij}, gdyż $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$.
- Dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\underline{\widetilde{F}(t) = (p|_{U_{ij}})^{-1}(F(t)) = \widetilde{F}'(t).}$$



3) Z 2) wynika, że rozszerzenia $\widetilde{F}$ skonstruowane w 1) na zbiorach postaci $N \times I$ są zgodne. Z ciągłości każdego z nich wynika ciągłość ich sumy – podniesienia na $Y \times I$.

Q(Loph)

Dowód tw. o podnoszeniu odwzorowań.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H} \arrow[d, "\lambda"] \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}\setminus\{0,1\}
\end{tikzcd}
$$

Definiujemy $\widetilde{f}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{H}$ tak.

1) Wybieramy $\widetilde{f}(0)$ – dowolny punkt zbioru $\lambda^{-1}(f(0))$.
2) Dla $z \in \mathbf{C}$ wybieramy drogę γ_z:

$$\gamma_z\colon [0,1] \to \mathbf{C}, \quad \gamma_z(0) = 0, \quad \gamma_z(1) = z.$$

Stosujemy tw. o podnoszeniu homotopii do $F_z := f \circ \gamma_z$ (Y to punkt) i kładziemy $\widetilde{f}(z) = \widetilde{F}_z(1)$.

3) Definicja z 2) nie zależy od wyboru drogi: każda inna droga jest homotopijna z γ_z, a homotopię można podnieść.