

1. Przestrzenie $\text{Hom}(V, V)$ oraz $\text{Hom}(V^*, V^*)$ zawierają element id . Odwzorowanie $f \mapsto f^*$ zadaje izomorfizm między nimi. Jakie są obrazy identyczności przy tym izomorfizmie.
2. Pokazać że $\text{Hom}(V^*, V^*)$ jest izomorficzna (kanonicznie nad V) z $[\text{Hom}(V, V)]^*$. Na co przechodzi identyczność przy tym izomorfizmie?
3. Przestrzeń $(V \otimes V^*)^*$ zawiera wyznaczony element B zadany przez $B(v \oplus \mu) = \mu(v)$. Na co przechodzi B .
4. $V \rightarrow \Lambda^k V$ jest funktorem kowariantnym. Mamy dane odwzorowania $f : V \rightarrow W$ oraz $g : W \rightarrow V$. Ich złożenie jest odwzorowaniem $V \rightarrow V$ więc ma wyznacznik. Jak policzyć ten wyznacznik w terminach (pomocniczych) baz w V, W oraz macierzy odwzorowań f, g .
5. Niech $f : V \rightarrow V$. Policzyć macierze $F(f)$ w (pomocniczych) bazach V dla różnych funktorów: $\Lambda^k, S^k, T^k, \dots$ (Po drodze warto opisać bazy w $F(V)$ pochodzące od bazy w V).
6. Niech $\Omega : \Lambda^2 V \rightarrow W$ będzie forma skosna. Wtedy na $V \oplus W$ możemy wprowadzić strukturę algebry: $(v_1, w_1) \cdot (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) + \Omega(v_1, v_2)$. Sprawdzić że to algebra Liego, zbadać (co to znaczy?) jej strukturę. Kiedy tak otrzymane algebry są izomorficzne.
- 6.5 Udowodnić że ślad $\text{Tr} : \mathfrak{gl}_n \rightarrow k$ jest jedynym funkcjonałem liniowym na $\mathfrak{gl}$ niezmienniczym na działaniu GL przez sprzęganie (i znormalizowanym: $\text{Tr id} = n$). Udowodnić że abelianizacja $GL(n)$ jako grupy to k^* (a homomorfizm abelianizacji to wyznacznik). Udowodnić że abelianizacja $\mathfrak{gl}_n$ jako algebry Liego to k (a homomorfizm abelianizacji to ślad). Omówić sprawę normalizacji.
7. Forma symetryczna dana (w ustalonej bazie) przez formę kwadratową $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$ jest nieosobliwa. Powiedzmy że mamy dane odwzorowanie $A : k^2 \rightarrow k^2$. Wyrazić macierz A^{Q^t} w terminach macierzy A (wszystko w tej ustalonej bazie).
8. Niech ω będzie forma symplektyczna. Wyrazić macierz odwzorowania A^{ω^t} w terminach macierzy A , w bazie (x_1, y_1, x_2, y_2) , w której ω jest równa odpowiednio $x^1 \wedge y^1 + x^2 \wedge y^2, x^1 \wedge y^2 + x_2 \wedge y_1, a(x^1 \wedge y^1 + x^2 \wedge y^2) + b(x^1 \wedge y^2 + x_2 \wedge y_1)$, Jaki warunek na a, b gwarantuje nieosobliwość ω .
8. Spolaryzować (całkowicie i częściowo) $xyzt + x^2y^2$.
9. Komutator w algebrze Liego zadaje odwzorowanie $\Lambda^2 g \rightarrow \Lambda^1 g (\rightarrow 0)$. Jego kokjadro to abelianizacja g . Dualizując otrzymujemy $(0 \rightarrow) \Lambda^1 g^* \rightarrow \Lambda^2 g^*$. To ostatnie odwzorowanie nazywam d_1 . Ten ciąg możemy przedłużyć do $(0 \rightarrow) \Lambda^1 g^* \rightarrow \Lambda^2 g^* \rightarrow \Lambda^3 g^*$ formułą $d_2(x \wedge y) = d_1 x \wedge y - x \wedge d_1 y$ (i można przedłużyć go dalej używając "zgradowanej/skosnej reguły Leibniza") Pokazać że $d_2 d_1 = 0$ jest równoważne tożsamości Jacobiego. Jeśli umiesz przedłużyć ten ciąg, pokaż że $d_{n+1} d_n = 0$. Niezależnie od tego (ponieważ $\Lambda^4 \mathfrak{sl}_2 = 0$ wyższe d są zerowe) policz homologie tego kompleksu dla $\mathfrak{sl}_2$.
10. (Pfaffian). Niech V ma wymiar $n = 2k$. Powiedzmy że w przestrzeni $\Lambda^n V^*$ wybraliśmy element o . Niech ω będzie forma skosna na V . Wtedy $\omega^{\wedge k}$ można zapisać jako $Pf(\omega)o$. Pokazać że ustalając pomocniczą bazę, Pfaffian jest wielomianem od współczynników macierzy ω . Jaki jest jego stopień?
Jak zmieni się $Pf(\omega)$ gdy zmnimy o ($o \rightarrow \eta o$). Pokazać że o wyznacza też element w $\Lambda^n V^*$, i możemy policzyć wyznacznik odwzorowania $V \rightarrow V^*$ zadanego przez ω . Pokazać że niezależnie od wyboru o kwadrat Pfaffianu to wyznacznik.
11. (Dziwny wymiar 4). Pokazać że jeśli V ma wymiar 4, to $SL(V)$ działając na $\Lambda^2 V$ zachowuje nieosobliwą formę kwadratową, jedyną z dokładnością do skalowania. Pokazać że ta forma ma 3-wymiarową przestrzeń izotropową (czyli jest postaci $W \oplus W^*$). Czyli $SL(4)$ jest blisko związana z $O(3, 3)$.
12. (Dziwny wymiar 2). Pokazać, że $SL(2)$ działając na $S^2(V^2)$ zachowuje formę kwadratową, która w pewnej bazie można zapisać jako $x^2 + y^2 - z^2$ a w innej jako $x^2 - yz$. Czyli $SL(2)$ jest blisko związana z $O(2, 1)$.