

Niech V będzie skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa. Rozważmy przestrzeń $V \oplus V^*$

1. Pokazać że odwzorowanie $f : V \rightarrow V$ indukuje odwzorowanie na $V \oplus V^*$, które jest funktorialne na kategorii której jedynym elementem jest V , a morfizmy to liniowe endomorfizmy V . Jaki jest kłopot z odwzorowaniem między różnymi przestrzeniami?
2. Na $V \oplus V^*$ mamy formę dwuliniową $B[(v, \mu)(w, \eta)] = \mu(w)$. Pokaż że automorfizmy (endomorfizmy) zachowujące B zachowują rozkład $V \oplus V^*$ w sumę prostą i są postaci $f \oplus f^*$.
3. Pokazać że zarówno B jak jej symetryzacja i antysymetryzacja są formami nieosobliwymi.
4. Pokazać że każda nieosobliwa forma skosna jest izomorficzna z antysymetryzacją B .
5. Nieosobliwa forma symetryczna (W, g) jest izomorficzna z $(V \oplus V^*, gB)$ wtedy i tylko wtedy gdy
 - a. W jest parzystowymiarowa i rozkłada się w sumę $W = A + B$ tak że zarówno A jak B są zerowe/izotropowe dla g lub
 - b*. W jest parzystowymiarowa i zawiera podprzestrzeń izotropową.
6. Pokazać że $V \oplus V^*$ jest izomorficzna ze swoją przestrzenią dualną, przez izomorfizm który "jest kanoniczny/naturalny nad obrazem $\text{Hom}(V, V)$ "
7. Znaleźć automorfizm $V \oplus V^*$ zachowujący $\omega B / gB$, który nie jest postaci $f \oplus f^*$. Co jeśli automorfizm zachowuje zarówno gB jak ωB ?
8. Załóżmy że podprzestrzeń $V \oplus V^*$ jest zadana przez formę dwuliniową $Q(v, w)$ na V , która najpierw traktujemy jako odwzorowanie $f : V \rightarrow V^*$, a potem bierzemy wykres $v, f(v)$ tego odwzorowania. Powiedzmy że taka podprzestrzeń jest izotropowa dla $B/gB/\omega B$. Co mówi to o formie Q .
9. Policzyc sygnaturę formy gB dla rzeczywistych przestrzeni wektorowych