

Orbity działania dolaczonego na $\mathfrak{g}$ i na G

Niech V będzie n -wymiarowa przestrzenią liniową nad topologicznym ciałem k . Przestrzeń $\mathfrak{g} = \text{End}(V)$ i grupa $G = GL(V)$ mają naturalną topologię. *Zadania poniżej dotyczą ciała liczb zespolonych. Ale jest wyzwanie: spróbujcie pomyśleć o innych ciałach topologicznych np. liczb rzeczywistych, liczb p -adycznych i szeregach formalnych.*

Działanie G na $\mathfrak{g}$ przez sprzęganie jest ciągłe (w istocie jest bardzo regularne). Podobnie działanie G na sobie. Interesuje nas obrazek orbitalny tych dwóch działań. Najpierw omówmy $\mathfrak{g}$.

1. Orbita $Om\ GL(V)$ na $\text{End}(V)$ jest domknięta iff m jest sprzężona z macierzą diagonalną.
2. Orbity Om, On mają rozłączne domknięcia iff wielomiany charakterystyczne m, n są różne. Odwzorowanie $m \rightarrow \chi_m(t)$ faktoryzuje się przez iloraz. Na dużej (jakiej) części $\mathfrak{g}/G$ to odwzorowanie jest różnowartościowe.
3. W domknięciu każdej orbity Om jest jedyna orbita elementu półprostego/macierzy diagonalnej. Jakiej? Jak ma się ona do wielomianu charakterystycznego m ?
4. Element m jest nilpotentny iff 0 jest w domknięciu Om .
5. Domknięcie orbity jest sumą skończenie wielu orbit.
6. Zbiór nilpotentów w End , oznaczany $\mathcal{N}(V)$, jest domkniętym podzbiorem, który jest niezmienniczy na działanie $GL(V)$, i rozkłada się na skończenie wiele orbit.
7. Na orbitach mamy częściowy porządek: orbita ON jest mniejsza niż orbita OM jeśli domknięcie ON zawiera się w domknięciu OM . Równoważnie jeśli ON zawiera się w domknięciu OM . Pokazać że jeśli $ON \leq OM$, to M, N mają ten sam wielomian charakterystyczny.
8. Pokazać że wszystkie nilpotenty o macierzach w których mam same zera za wyjątkiem paska bezpośrednio nad przekątną, gdzie wszystkie wyrazy różne od zera, ($a_{ij} = 0$, chyba że $j = i + 1$, i wtedy wyraz jest niezerowy) są sprzężone.
 - 8a. Pokazać że istnieje gesta orbita. Czyli element maksymalnego porządku.
 - 8b. Nilpotent N którego diagram Younga jest rozdrobnieniem partycji nilpotenta M spełnia $ON \leq OM$.
 - 8c. Pokazać że orbita nilpotenta $(2, 2)$ jest w domknięciu orbity $(3, 1)$.
9. Jeśli N jest w domknięciu orbity OM to wymiar $\ker N^k$ jest większy niż wymiar $\ker M^k$.
 - 9a. Twierdzenie Gerstenhabera i Hesslinka mówi że prawdziwa jest też implikacja przeciwna. Spróbuj udowodnić ją dla przestrzeni możliwie dużego wymiaru. Na przykład przy pomocy zadania 2 można je udowodnić dla przestrzeni 4 wymiarowych.
10. Powiedzmy że endomorfizmy A, B mają te same wielomiany charakterystyczne i te same rozszerzone przestrzenie własne. Znaczący to że A, B są elementami ustalonej podalgebry $\prod \text{End}(E_{\lambda_i})$ w $\text{End}(V)$. Pokazać że A, B są sprzężone przez element $GL(V)$ w.t.w. gdy są sprzężone przez element $\prod GL(E_{\lambda_i})$. Wywnioskować, że poset orbit elementów o wielomianie charakterystycznym takim jak wielomian A jest produktem posetów (co to?) orbit nilpotentnych w $\text{End}(E_{\lambda_i})$.
11. Narysować obrazki rozkładów orbitalnych w niskowymiarowych grupach i algebrach Lie. sl_2R , grupy i algebry, SL_2C , grupy i algebry, B_2 : macierzy trójkatnych, grupy i algebry, grupy i algebry górnych macierzy trójkatnych ($1/0$ na przekątnej). Dla tych dwóch ostatnich zbadać też obrazek orbitalny reprezentacji kodolaczonej.
12. Zbadać obrazek orbitalny dla działań $GL(n)/SL(n)$ (nad R oraz C) na formach symetrycznych, skosnych, oraz $\text{Hom}(V, V)$ i $V \otimes V$.